

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală 28.02.2015

CLASA a IX-a

BAREM

Subiectul 1 (7 puncte)

1. Dacă $a, b, c \geq 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$, arătați că: $a^n(b+c-2a) + b^n(a+c-2b) + c^n(a+b-2c) \leq 0$.

Relația din membrul stâng este simetrică, alegem $a \leq b \leq c$,

atunci $a^n \leq b^n \leq c^n$ și $b+c-2a \geq a+b-2c$ 2p

Tripletele (a^n, b^n, c^n) și $(b+c-2a, c+a-2b, a+b-2c)$ au monotonii diferite2p

Inegalitatea lui Cebâșev, avem că:

$$a^n(b+c-2a) + b^n(c+a-2b) + c^n(a+b-2c) \leq \frac{(a^n+b^n+c^n)(b+c-2a+c+a-2b+a+b-2c)}{3} = 0 \dots\dots 2p$$

Are loc egalitatea, dacă $a = b = c$ 1p

Subiectul 2 (7 puncte)

2. Arătați că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, atunci numărul $3^n + 1$ nu este divizibil cu 2^n .

Dacă $a = 2b + 1$, $b \in \mathbb{N}$, atunci $a^2 = 4b(b+1) + 1 = 8c + 1$, unde $c \in \mathbb{N}$ 2p

Dacă $n = 2k$, $k \geq 2$, atunci $3^n + 1 = (3^k)^2 + 1 = 8c + 1 + 1 = 8c + 2 \not\vdash 4$ și $2^n : 4$ 2p

Dacă $n = 2k + 1$, $k \geq 1$, atunci $3^n + 1 = 3 \cdot (3^k)^2 + 1 = 3(8c + 1) + 1 = 24c + 4 \not\vdash 8$ și $2^n : 8$ 2p

Concluzia1p

Subiectul 3 (7 puncte)

3. Arătați că nu există nici o progresie aritmetică infinită cu rația nenulă care să fie format numai din numere prime.

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ progresia aritmetică cu rația r , iar $a_p > 1$ un termen al ei1p

Fie $a_{p+m} = a_p + mr$ 3p

Pentru $m = a_p$, avem că $a_{p+m} = a_p + a_p \cdot r = a_p(1+r)$ care nu este prim3p

Subiectul 4 (7 puncte)

4.

a) Demonstrarea relației - - - - - 3p

b) Suma vectorilor mediani $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$
- - - 4p.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 28.02.2015
CLASA a X-a
BAREM

Subiectul 1 (7 puncte)

1. Să se rezolve ecuația: $\frac{1}{4^x + 1} + \frac{1}{2^x \cdot 3^x - 1} = \frac{2^x}{4^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^x - 3^x}$.

(Marin Marin, prof. univ. habil. dr.)

- Ecuția dată se mai scrie $(2^x + 3^x)^2 = (2^x \cdot 3^x - 1)^2$ (1)1p
 Presupunem că $x \geq 0$, atunci din (1) deducem că $2^x + 3^x = 2^x \cdot 3^x - 1$ 1p
 $x = 1$ rădăcină a ecuației0.5p
 unicitatea1p
 Presupunem că $x < 0$, obținem $(2^{-x} + 3^{-x})^2 = (2^{-x} \cdot 3^{-x} - 1)^2$ 2p
 Repetăm raționamentul de la cazul $x \geq 0$ 1.5 p

Subiectul 2 (7 puncte)

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, $|a| = |b| = |c|$. Să se arate că dacă ecuația $az^2 + bz + c = 0$ are cel puțin o rădăcină de modul 1, atunci $b^2 = ac$.

- Fie z_1, z_2 rădăcinile ecuației cu $|z_1| = 1$ 0.5p
 $|z_1 \cdot z_2| = \left| \frac{c}{a} \right| = 1$, rezultă că $|z_2| = 1$ 1.5p
 $|z_1 + z_2| = \left| \frac{-b}{a} \right| = 1$,1.5p
 $1 = |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2 = 0$ 2p
 $(z_1 + z_2)^2 = z_1 z_2$, adică $\left(-\frac{b}{a} \right)^2 = \left(\frac{c}{a} \right)$, deci $b^2 = ac$ 1.5p

Subiectul 3 (7 puncte)

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\lg(x^3 + x) = \log_2 x$

- Fie $\log_2 x = t \Rightarrow x = 2^t$ 1p
 Ecuația dată devine: $\lg(8^t + 2^t) = t$ 1p
 $8^t + 2^t = 10^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5} \right)^t + \left(\frac{1}{5} \right)^t = 1$ 1.5p
 $t = 1$ soluție2.5p

Subiectul 4 (7 puncte)

4. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ două funcții crescătoare și surjective. Dacă $\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$, să se arate că $f = g$.

- Din ipoteză $f(a) = g(a) = a$ și $f(b) = g(b) = b$ 1p
 Fie $x, y \in [a, b], x < y$ avem $f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x)$ 2p
 $g(x) - f(x) \leq g(y) - f(y)$ 1p
 Funcția $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, h = g - f$ este crescătoare și $h(a) = h(b) = 0$ 2p
 $\forall x \in [a, b], h(x) = 0$, deci $f = g$ 1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 28.02.2015
CLASA a XI-a
BAREM

Subiectul 1 (7 puncte)

Subiectul 2 (7 puncte)

1. Demonstrați că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ecuația $\frac{1^{nx} + 2^{nx} + \dots + n^{nx}}{n^{nx}} = \frac{e}{e-1}$ are o unică rădăcină reală.

2. Relația din enunț scrisă în forma: $\frac{1^{nx} + 2^{nx} + \dots + (n-1)^{nx}}{n^{nx}} = \frac{1}{e-1}$ 1p

sau echivalent, $\left[\left(\frac{1}{n}\right)^n\right]^x + \left[\left(\frac{2}{n}\right)^n\right]^x + \dots + \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right]^x = \frac{1}{e-1}$ 1p

Fie funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) =$ 1.5p

funcția f_n este continuă, strict descrescătoare1.5p

$f_n(0) = n-1 \geq 1 > \frac{1}{e-1}, < \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 < \frac{1}{e-1}$ 1.5p

Rezultă ecuația dată are o unică soluție reală strict pozitivă1p

Subiectul 3 (7 puncte)

2. Se consideră șirul $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Știind că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$, să se calculeze

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(a_n - \frac{\pi^2}{6} \right).$

3. $n \left(a_n - \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{a_n - \frac{\pi^2}{6}}{\frac{1}{n}}$ 1p

Fie $x_n = a_n - \frac{\pi^2}{6}$ și $y_n = \frac{1}{n}$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, (y_n)_{n \geq 1}$ strict descrescător2.5p

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = -1$ 2.5p

Teorema lui Cesaro-Stolz, cazul $\frac{0}{0}$ obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(a_n - \frac{\pi^2}{6} \right) = -1$ 1.5p

Subiectul 4 (7 puncte)

3. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^m \cdot B^n = B^n \cdot A^m$. Să se arate că dacă matricele A^m și B^n nu sunt de forma $\lambda I_2, \lambda \in \mathbb{R}$, atunci $AB = BA$.

4. Pentru orice $k \in N$, există $a_k, b_k, c_k, d_k \in R$ astfel încât $A^k = a_k \cdot A + b_k \cdot I_2$ și $B^k =$
 $c_k \cdot B + d_k \cdot I_2$ 2.5p
- Din relația dată $A^m \cdot B^n = B^n \cdot A^m$ rezultă
 $(a_m A + b_m I_2)(c_n B + d_n I_2) = (c_n B + d_n I_2)(a_m A + b_m I_2)$ 2.5p
- sau, echivalent $a_m \cdot c_n (AB - BA) = 0_2$ 2p
- rezultă $AB = BA$, deoarece $a_m \cdot c_n \neq 0$ 0.5p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 28.02.2015

CLASA a XII-a

BAREM

Subiectul 1 (7 puncte)

1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu două elemente fixate $a, b \in A$ cu proprietățile

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2, (a+b)^3 = a^3 + b^3$$

Să se arate că $(a+b)^{2015} = a^{2015} + b^{2015}$.

(Marin Marin, prof. univ. habil. dr.)

1. Avem $(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow ab = -ba$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + a^2b + ba^2 + b^3 \Rightarrow ab^2 = -ba^2 \dots\dots\dots 1p$$

Deasemenea, avem $ab^2 = b^2a$ și $a^2b = ba^2 \dots\dots\dots 2p$

$$ab^2 = ab \cdot b = (-ba)b = -b(ab) = -b(-ba) = b^2a$$

$$a^2b = a(ab) = -a(ba) = -(ab)a = -(-ba)a = ba^2$$

Se demonstrează prin inducție că $a^n b = -b^n a \dots\dots\dots 3p$

În baza relației de mai sus se deduce că $(a+b)^n = a^n + b^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 1.5p$

Subiectul 2 (7 puncte)

2. Să se calculeze: $\int \frac{e^x(x-2)}{x(x^2+e^x)} dx, x \in (0, \infty)$

2. Relația din enunț se mai scrie $\int \frac{e^x(x-2)}{x(x^2+e^x)} dx = \int \frac{e^x(x^2-2x)}{x^2(x^2+e^x)} dx \dots\dots\dots 2p$

Fie $f, g \in \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, g(x) = x^2 + e^x \dots\dots\dots 3p$

Atunci $f(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot f'(x) = e^x(x^2 - 2x) \dots\dots\dots 2p$

$$\int \frac{e^x(x^2-2x)}{x^2(x^2+e^x)} dx = \ln(x^2+e^x) - 2\ln x + b \dots\dots\dots 0.5p$$

Subiectul 3 (7 puncte)

3. Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că I_n este o funcție descrescătoare de n

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-2}}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}}$

3. Integrând prin părți obținem

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} \quad I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$$

.....2p

Cum $\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$, $I_n \geq I_{n+1}$, ceea ce rezolvă a)1.5p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

.....1.5p

Dar

$$\frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$$

.....1p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$$

.....1p

Subiectul 4 (7 puncte)

1. Matricea pătratică $A(a_{ij})$, de ordinul n , are proprietatea

$$\frac{1}{m^n} \begin{vmatrix} a_{11} + m & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + m & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \frac{1}{m} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + \frac{1}{m} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + \frac{1}{m} \end{vmatrix} \quad \text{egalitatea având loc}$$

pentru $n+1$ valori distincte ale lui $m \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că determinantul matricei A are valoarea 1.

(Marin Marin, prof. univ. habil. dr.)

1. Scriem egalitatea din enunț în forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} + m & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + m & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + m \end{vmatrix} = m^n \begin{vmatrix} a_{11} + \frac{1}{m} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + \frac{1}{m} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + \frac{1}{m} \end{vmatrix} \quad \dots \dots \dots 1.5p$$

sau, echivalent,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + m & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + m & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_{11} + 1 & ma_{12} & \dots & ma_{1n} \\ ma_{21} & ma_{22} + 1 & \dots & ma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ma_{n1} & ma_{n2} & \dots & ma_{nn} + 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 1.5p$$

sau, mai concis, $\det(A + mI) = \det(mA + I)$ 1p

Fie funcția polinomială $f(x) = \det(A + xI) - \det(xA + I)$ 1.5p

Funcția f este identic nulă deoarece are gradul n și are cel puțin $n + 1$ rădăcini (egalitatea din enunț are loc pentru cel puțin $n + 1$ valori distincte a lui $m \in N^*$) 1.5p

Deducem $\det(A) = \det(I)$ 0.5p