INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CONSTANȚA

ROMÂNIA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2019

Clasa a X-a

Barem

SUBIECTUL 1

Ecuația echivalentă cu $\sqrt[3]{\frac{2x-16}{8}}-\sqrt[3]{\frac{x-4}{8}}+\sqrt[3]{\frac{3x-27}{9}}-\sqrt[3]{\frac{x-3}{9}}=0\Leftrightarrow$

$$\frac{\frac{x-12}{8}}{\left(\sqrt[3]{\frac{2x-16}{8}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{2x-16}{8}}\sqrt[3]{\frac{x-4}{8}}+\left(\sqrt[3]{\frac{x-4}{8}}\right)^2}+\frac{\frac{2(x-12)}{9}}{\left(\sqrt[3]{\frac{3x-27}{8}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{3x-27}{9}}\sqrt[3]{\frac{x-3}{9}}+\left(\sqrt[3]{\frac{x-3}{9}}\right)^2}=0 \ldots.5\text{p}$$

Factor comun $x-12$ si din $u^2+uv+v^2>0,\ \forall u\cdot v\neq 0$ avem că $x=12$ este soluţie unică..... 2p

Sau, dacă $x>12$ avem $\sqrt[3]{\frac{x-8}{4}}>\sqrt[3]{\frac{x-4}{8}}$ şi $\sqrt[3]{\frac{x-9}{3}}>\sqrt[3]{\frac{x-3}{9}}$, deci MS>MD. Analog pentru $x<12$, avem MS<MD.

SUBIECTUL 2

Notăm $z+1=u, \bar{z}-1=v$, relaţia devine $\left|u-|v|\right|=\left|v+|u|\right|$, ridicând la pătrat avem

$(u-|v|)(\bar{u}-|v|)=(v-|u|)(\bar{v}-|u|)$ sau $|u|(v+\bar{v})+|v|(u+\bar{u})=0$ 2p

$|z+1|(z+\bar{z}-2)+|\bar{z}-1|(z+\bar{z}+2)=0$ (*), dar dacă $z=x+iy, x,y\in\mathbf{R}$, relaţia (*) devine

$2(x-1)\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2(x+1)\sqrt{(x-1)^2+y^2}=0$ 2p

de unde rezultă $x^2-1\leq 0\Leftrightarrow x\in[-1;1]$, dar şi că $xy=0$.

Dacă $y=0\Rightarrow x\in[-1;1]$, dacă $x=0\Rightarrow y\in\mathbf{R}$.

Soluţiile sunt date de mulţimea $S=[-1;1]\cup\{iy\mid y\in\mathbf{R}\}$ 3p

SUBIECTUL 3

Notăm $a=\log_{2018}(x-1), b=\log_{2019}x, a>0, b>0$ şi ecuaţia se rescrie $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+b\right)=4$ sau

$ab+\frac{1}{ab}=2\Leftrightarrow ab=1$. 3p

Fie funcţia $f(x)=\log_{2018}(x-1)\cdot\log_{2019}x$ este strict crescătoare pe $(2;\infty)$ ca produs de funcţii crescătoare pozitive, deci ecuaţia $f(x)=1$ are cel mult o soluţie. Cum $x=2019$ verifică, este soluția căutată 4p

SUBIECTUL 4

$\log_{xy}(x+y) \geq \log_{xy}\left(2\sqrt{xy}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log_2(xy)}$, analog pentru celelalte 2p

$MS \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)+\frac{1}{(x+y)\log_2(xy)}+\frac{1}{(y+z)\log_2(yz)}+\frac{1}{(z+x)\log_2(xz)} \overset{ineg.med.}{\geq}$ 1p

$\geq \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{(x+y)(y+z)(x+z)}}+3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{(x+y)(y+z)(x+z)\log_2(xy)\log_2(yz)\log_2(xz)}} =$…….. 1p

$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(x+z)}}+3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(x+z)}}\frac{1}{\sqrt[3]{\log_2(xy)\log_2(yz)\log_2(xz)}} \overset{ineg.med.}{\geq}$ ….1p

$\frac{9}{4(x+y+z)}+\frac{9}{2(x+y+z)}\cdot\frac{3}{\log_2(xyz)^2}=\frac{9}{4(x+y+z)}+\frac{27}{4(x+y+z)}=\frac{9}{(x+y+z)}$ …… 2p

Notă. Orice altă rezolvare corectă primeşte punctajul maxim.