

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem clasa a XII-a

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

PROBLEMA 1

Fie mulțimea $G = (k, \infty) \setminus \{k+1\}$, $k > 0$, pe care se definește legea $*$ astfel încât:

$$\log_a[(x * y) - k] = \log_a(x - k) \cdot \log_a(y - k), (\forall) x, y \in G, a > 0, a \neq 1.$$

- Să se arate că structura algebrică $(G, *)$ este grup abelian.
- Să se determine elementele $x \in G$ care verifică relația: $x = x'$, unde s-a notat cu x' simetricul lui x în raport cu legea $*$.
- Să se arate că grupul $(\mathbf{R}^*, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(G, *)$.

(propus de prof. Zay Éva - CNS Zalău, din culegerea Olimpiade și concursuri școlare 2009,

Etapa locală- Galați- enunț modificat)

Soluție

$$\text{Relația dată } \log_a[(x * y) - k] = \log_a(x - k) \cdot \log_a(y - k), (\forall) x, y \in G, a > 0, a \neq 1, k > 0$$

se poate scrie în următoarea formă:

$$\log_a[(x * y) - k] = \log_a(x - k)^{\log_a(y - k)}, x, y \in G = (k, \infty) \setminus \{k+1\}, k > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$\text{de unde } x * y = k + (x - k)^{\log_a(y - k)}, \forall x, y \in G, k > 0, a > 0, a \neq 1 \dots\dots\dots 0,5 \text{ puncte}$$

a) Stabilitatea lui G în raport cu legea $*$:

$$\forall x, y \in G \Rightarrow x - k, y - k \in (0, \infty) \setminus \{1\} \Rightarrow \log_a(x - k) \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \Rightarrow (x - k)^{\log_a(y - k)} \in (0, \infty) \setminus \{1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k + (x - k)^{\log_a(y - k)} \in (k, \infty) \setminus \{k+1\} \Rightarrow x * y \in G, \forall x, y \in G \Leftrightarrow G \text{ stab.} \dots\dots\dots 0,5 \text{ puncte}$$

Asociativitatea: $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$

$$(x * y) * z = (k + (x - k)^{\log_a(y - k)}) * z = k + (k + (x - k)^{\log_a(y - k)} - k)^{\log_a(z - k)} = k + (x - k)^{\log_a(y - k) \log_a(z - k)}$$

$$x * (y * z) = x * (k + (y - k)^{\log_a(z - k)}) = k + (x - k)^{\log_a(k + (y - k)^{\log_a(z - k)} - k)} = k + (x - k)^{\log_a(y - k) \log_a(z - k)} =$$

$$= k + (x - k)^{\log_a(z - k) \log_a(y - k)} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Comutativitatea: $x * y = y * x, \forall x \in G$

$$k + (x - k)^{\log_a(y - k)} = k + (y - k)^{\log_a(x - k)} \Leftrightarrow \log_a(y - k) \cdot \log_a(x - k) = \log_a(x - k) \cdot \log_a(y - k)$$

$$\dots\dots\dots 0,5 \text{ puncte}$$

Element neutru: $\exists e \in G, x * e = e * x = x, \forall x \in G$