

# Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

28 februarie-2016

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

| Nr. problemei | Soluție, rezolvare                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Punctaj                                                     |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1.            | <p>Demonstrăm prin inducție matematică:</p> <p><math>P(n): (13^n + 7^n - 2) : 9, (\forall) n \in \mathbb{N}</math></p> <p>I. <math>P(0): 13^0 + 7^0 - 2 = 0 : 9 (A);</math></p> <p>II. <math>P(n) \rightarrow P(n+1), (\forall) n \in \mathbb{N};</math></p> <p><math>P(n+1): (13^{n+1} + 7^{n+1} - 2) : 9</math></p> $13^{n+1} + 7^{n+1} - 2 = 13^n \cdot 13 + 7^n \cdot 13 - 26 - 7^n \cdot 6 + 24 = 13 \cdot \underbrace{(13^n + 7^n - 2)}_{:9} - 6 \cdot (7^n - 4);$ $6 \cdot (7^n - 4) : 3 \quad (1)$ $7^n - 4 = (6+1)^n - 4 = M_3 + 1 - 4 = M_3 - 3 = M_3 \Rightarrow (7^n - 4) : 3, (\forall) n \in \mathbb{N} \quad (2)$ <p>Din 1 și 2 <math>\Rightarrow 6 \cdot (7^n - 4) : 9, (\forall) n \in \mathbb{N};</math></p> <p>Așadar <math>P(n+1)</math> este adevărată;</p> <p>Conform principiului inducției matematice <math>\Rightarrow P(n)</math> este propoziție adevărată, <math>(\forall) n \in \mathbb{N}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                              | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> |
| 2.            | <p>Presupunem prin metoda reducerii la absurd că există <math>m, n, p \in \mathbb{N}^*, m &lt; n &lt; p</math>, astfel încât</p> $\sqrt{11} = a_m = a_1 + (m-1) \cdot r$ $\sqrt{13} = a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ $\sqrt{15} = a_p = a_1 + (p-1) \cdot r, r > 0 \text{ este rația progresiei aritmetice.}$ $\begin{cases} \sqrt{13} - \sqrt{11} = (n-m) \cdot r \\ \sqrt{15} - \sqrt{11} = (p-m) \cdot r \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{\sqrt{15} - \sqrt{11}} = \frac{n-m}{p-m} \stackrel{\text{not}}{=} q \in \mathbb{Q}_+^* \Rightarrow \sqrt{13} - \sqrt{11} = q \cdot \sqrt{15} - q \cdot \sqrt{11} \Leftrightarrow$ $(q-1) \cdot \sqrt{11} = q \cdot \sqrt{15} - \sqrt{13} \Rightarrow 11 \cdot (q-1)^2 = 15 \cdot q^2 - 2 \cdot q \sqrt{195} + 13 \Leftrightarrow 2 \cdot q \sqrt{195} = 4 \cdot q^2 + 22 \cdot q + 2,$ <p>de unde, prin împărțire cu <math>2q \in \mathbb{Q}_+^*</math>, obținem: <math>\sqrt{195} = \frac{2 \cdot q^2 + 11 \cdot q + 1}{q} \in \mathbb{Q}</math>, contradicție.</p> <p>Așadar, presupunerea făcută este falsă, de unde rezultă că numerele <math>\sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{15}</math> nu pot fi printre termenii unei progresii aritmetice.</p> | <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p>                               |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                   |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 3. | <p>Deoarece <math>2016 &gt; 0</math> și <math> x + y  \geq 0 \Rightarrow  x + y  &gt; 0</math> și <math>\left[ \frac{6 \cdot x}{x^2 + 9} \right] &gt; 0</math> (1)</p> <p>Dar <math>x^2 + 9 \geq \pm 6 \cdot x, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq \frac{6 \cdot x}{x^2 + 9} \leq 1 \Rightarrow \left[ \frac{6 \cdot x}{x^2 + 9} \right] \in \{-1, 0, 1\}</math> (2)</p> <p>Din 1 și 2 <math>\Rightarrow \left[ \frac{6 \cdot x}{x^2 + 9} \right] = 1</math> (3)</p> <p>Din <math>\begin{cases} \left[ \frac{6 \cdot x}{x^2 + 9} \right] &gt; 0 \\ \left[ \frac{6 \cdot x}{x^2 + 9} \right] = 1 \\ -1 \leq \frac{6 \cdot x}{x^2 + 9} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{6 \cdot x}{x^2 + 9} = 1 \Rightarrow x = 3;</math></p> <p>Ecuația devine <math> 3 + y  = 2016 \Rightarrow 3 + y = \pm 2016 \Rightarrow y \in \{2013, -2019\};</math></p> <p>Așadar <math>(x, y) \in \{(3, 2013); (3, -2019)\}.</math></p>                                                                                                                                                                         | <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> |
| 4. | <p>Fie Q mijlocul lui <math>[AE]</math>.</p> <p>Deoarece P este centrul cercului circumscris triunghiului ADE <math>\Rightarrow PQ</math> este mediatoarea segmentului <math>[AE]</math>.</p> <p>Din <math>O = S_{AE}(P) \Rightarrow Q</math> este mijlocul segmentului <math>[PO]</math>.</p> <p>Se obține că APEO este romb (1)</p> <p>Deoarece unghiul <math>\angle ADE</math> este înscris în cerc și are <math>m(\angle ADE) = 45^\circ \Rightarrow m(\angle APE) = 90^\circ</math> (2)</p> <p>Din 1 și 2 <math>\Rightarrow APEO</math> este pătrat.</p> <p><math>\begin{cases} m(\angle DAP) = 90^\circ - m(\angle BAP) = m(\angle OAB) \\ \text{Din } [AB] \equiv [AD], \text{ respectiv } [OA] \equiv [AP] \end{cases} \Rightarrow \triangle OAB \equiv \triangle PAD \Rightarrow [PA] \equiv [PD] \equiv [OA] \equiv [OB] \equiv [OE] \Rightarrow</math></p> <p>O este centrul cercului circumscris triunghiului <math>\triangle AEB</math>, iar din relația lui Sylvester <math>\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}</math></p> | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> |