



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16.02.2019

Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Se consideră funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \ln(\sin x)$ și F o primitivă a sa. Să se arate că există și este finită limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$.

PROBLEMA 2. Se consideră mulțimea $G = (-1, 1)$ și operația $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$. Să se arate că $(G, *)$ este un grup comutativ și să se calculeze limita șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, unde $x_n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $x \in G$.

PROBLEMA 3. Fie H_1 și H_2 două părți stabile finite a lui $\mathbb{C}^*$ în raport cu operația de înmulțire, având m , respectiv n elemente. Să se arate că dacă $(m, n) = 1$, atunci $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

PROBLEMA 4. Să se arate că dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție neconstantă și periodică, fără perioadă principală, atunci aceasta nu admite primitive și nu este integrabilă pe niciun interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.