

**OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICA
BLAJ, 16.02.2013**

CLASA a V-a

Subiectul 1

a) Suma a trei numere naturale este egală cu 92. Aflati numerele stiind că dacă împărțim al doilea număr la primul se obtine câtul 2 si restul 2, iar dacă împărțim al treilea la al doilea obtinem, din nou, câtul 2 si restul 2.

b) Doi frati au vârstele exprimate prin numere naturale impare consecutive. Dacă suma vârstelor celor doi frati este egala cu predecesorul patratului lui 7, aflati varsta fratelui mai mare.

Subiectul 2

Calculati: a) $(63^5 - 3^{10})^{10} : (7^{35} : 7^{30} - 1^{2013})^{10} : 9^{50}$;

b) $3a + 8b + 5c$, dacă $a + b = 4^3 + 7$ si $b + c = 7^2 - 6$;

c) $x + 1$, dacă $x = 1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2013}$

Subiectul 3

a) Fie $A = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$ si $B = \{y \mid y = x^2, x \in A\}$.

Calculati: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$;

b) Determinati multimile A, B, C nevide si distincte doua câte doua, dacă îndeplinesc simultan conditiile:

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\}, \quad A \cap B \cap C = \emptyset, \quad A \setminus C = \{1\}, \quad C \setminus A = \{3\}.$$

Precizati toate cazurile posibile;

c) Fie multimile $A = \{3^{36}, 4^{18}, 9^{12}, 8^{16}\}$, $B = \{8^{20}, 16^9, 2^{48}, 27^{12}\}$. Ordonati crescator elementele multimii $A \cup B$.

Subiectul 4

a) Aratati ca: $a \cdot \overline{xy} + b \cdot \overline{yx} = \overline{ab} \cdot x + \overline{ba} \cdot y$ cu a, b, x, y cifre nenule;

b) Determinati numerele de doua cifre $\overline{ab}$ cu proprietatea $\overline{ab} = \overline{ba} + a + 3b$

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;

Timp de lucru – 3 ore.

Barem de corectare
Clasa a V-a

I.	a) $a + b + c = 92$ $b = 2a + 2$ $c = 2b + 2$ $a = 12, b = 26, c = 54$ b) $2n + 1; 2n + 3$ $2n + 1 + 2n + 3 = 48 \Rightarrow n = 11 \Rightarrow 25 \text{ ani}$	4p 3p
II.	a) $\left(63^5 - 3^{10}\right)^{10} : \left(7^{35} : 7^{30} - 1^{2013}\right)^{10} : 9^{50} = \dots$ $= 1$ b) $3a + 8b + 5c = 428$ c) $x + 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2013} = 2^{2014} - 2$	2p 3p 2p
III.	a) $A = \{1; 2; 4; 8\}; B = \{1; 4; 16; 64\}$ $A \cup B = \{1, 2, 4, 8, 16, 64\}$ $A \cap B = \{1, 4\}$ $A \setminus B = \{2; 8\}$ b) $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$ $A = \{1\}, B = \{2, 3\}, C = \{3\}$ $A = \{1\}, B = \{2, 1, 3\}, C = \{3\}$ $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$ $A = \{1, 2\}, B = \emptyset, C = \{2, 3\}$ c) $A = \{3^{36}, 2^{36}, 3^{24}, 2^{48}\}, B = \{2^{60}, 2^{36}, 2^{48}, 3^{36}\}$ $A \cup B = \{2^{36}, 3^{24}, 2^{48}, 3^{36}, 2^{60}\}$	2p 2p 3p
IV.	a) $a \cdot \overline{xy} + b \cdot \overline{yx} = \overline{ab} \cdot x + \overline{ba} \cdot y$ verificare $\overline{ab} = \overline{ba} + a + 3b \Rightarrow 10a + b = 13b + 2a$ b) $2a = 3b$ $\overline{ab} = 32, \overline{ab} = 64$	3p 4p

OLIMPIADA LOCALĂ DE MATEMATICĂ
BLAJ, 16.02. 2013
CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

a) Calculati:

$$\frac{\left(3\frac{1}{20} - 2,65\right) \cdot 2^2 + \frac{2}{5}}{\{(3^{15})^4; [(3^{10})^5 \cdot (3^3)^3]\} \cdot 2 - 4\frac{1}{2}} \cdot 0,03$$

b) Fie a,b,c trei zecimale consecutive ale numărului $\frac{4}{37}$. Aflați $a^2 + b^2 + c^2$.

c) Din sirul numerelor naturale de la 1 la 1000 se elimină toate numerele divizibile cu 5. Aflati suma numerelor rămase.

SUBIECTUL 2

a) Aflati numerele de forma $\overline{4abc}$ divizibile cu 9 și cu 25.

b) Demonstrați că numărul $2^{2013} - 2^{2012}$ se divide cu numărul $2^{2012} - 2^{2011}$.

c) Aflati cel mai mic număr natural nenul x pentru care $x \cdot 3^5 \cdot 11^3 \cdot 61$ este pătrat perfect.

SUBIECTUL 3

Intr-un semiplan determinat de dreapta PQ se construiesc unghiul drept AOB astfel încât $O \in (PQ)$ și $m(\angle BOQ) = 35^\circ$. Fie (OX și (OY bisectoarele unghiurilor $\angle BOQ$ și respectiv $\angle AOP$.

a) Calculati $m(\angle XOY)$

b) Dacă semidreapta (OC este opusa semidreptei (OA calculati $m(\angle YOC)$.

SUBIECTUL 4

Fie unghiul $\angle XOY$ cu măsura de 60° si în interiorul său se construiesc semidreptele $[OZ$ si $[OT$ astfel încât $\angle XOZ = \angle ZOT = \angle TOY$. Se consideră punctele $A \in (OX, B \in (OZ, C \in (OT$ și $D \in (OY$ astfel încât $OA=OB=OC=OD$.

a) Demonstrati că $\triangle AOB \cong \triangle COD$

b) $\triangle AOC \cong \triangle BOD$

c) Dacă $CD = a \text{ cm}, BD = b \text{ cm}$ aflati perimetrul triunghiului ABC .

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;

Timp de lucru – 3 ore.

Barem de corectare
Clasa a VI-a

S1	a) $\dots = \frac{\frac{8}{20} \cdot 4 + \frac{2}{5}}{6 - \frac{9}{2}} \cdot \frac{3}{100} = \frac{1}{25}$ b) $\frac{4}{37} = 0,(108) \Rightarrow 65$ c) $S = 1001 \cdot 1000 : 2 - (5 + 10 + 15 + \dots + 1000) = 500 \cdot 1001 - 500 \cdot 201 = 400000$	3p 2p 2p
S2	a) $\overline{4abc} : 25 \Leftrightarrow \overline{bc} \in \{00; 25; 50; 75\}$ $\overline{4abc} : 9 \Leftrightarrow (4 + a + b + c) : 9$ nr. sunt 4500, 4725, 4050, 4950, 4275 b) $2^{2013} - 2^{2012} = 2 \cdot (2^{2012} - 2^{2011}) : (2^{2012} - 2^{2011})$ c) $x = 3 \cdot 11 \cdot 61 = 2013$	2p 3p 2p
S3	Desen corect a) $m(\sphericalangle AOP) = 55^{\circ}$ $m(\sphericalangle XOY) = m(\sphericalangle XOB) + m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle AOY) = 135^{\circ}$ b) $m(\sphericalangle COY) = m(\sphericalangle AOC) - m(\sphericalangle AOY) = 152^{\circ} 32'$	1p 3p 3p
S4	Desen corect a) $\triangle AOB = \triangle COD (LUL)$ b) $\triangle AOC = \triangle BOD (LUL)$ c) $\triangle AOB = \triangle COB (LUL) \Rightarrow AB = BC = CD = a$ din b) $\Rightarrow BD = AC = b \text{ cm}$ $\Rightarrow P_{\triangle ABC} = 2a + b \text{ cm}$	1p 2p 2p 2p

OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICA
BLAJ, 16.02.2013
CLASA A VII-A

Subiectul 1 1. Se consideră numerele raționale

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013} - \left(2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{2014}{2013} \right) \text{ și } a = 1, (1) \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10} \right) - 1.$$

a) Să se arate că pentru orice număr natural $n \neq 0$, are loc egalitatea $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

b) Să se calculeze S^a .

2. Să se arate că fracția $\frac{3^{n+1} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+2} + 6 \cdot 3^n \cdot 5^n}{2^{2n+1} \cdot 3^n + 3^{n+1} \cdot 4^n + 2^{n+1} \cdot 6^{n+1}}$ se simplifică cu 17, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Subiectul 2 1. Să se arate că numărul $N = \frac{(5+15)^2 + \sqrt{\frac{3}{2^2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} \cdot a^2} - \sqrt{160000}}{(10+3) \cdot 2 - \sqrt{625}} + a$ nu poate

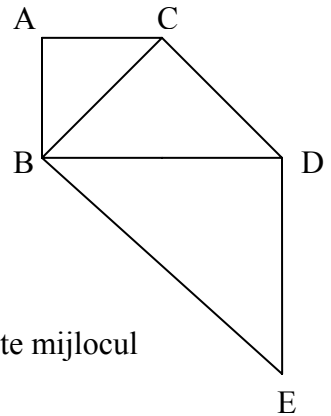
fi pătrat perfect oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$.

2. Numerele naturale a, b, c sunt direct proporționale cu trei numere naturale consecutive. Să se afle valorile lui a, b, c știind că $b - a = 7$ și $b + c = 49$.

Subiectul 3

În figura alăturată triunghiurile $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ și $\triangle BDE$ sunt triunghiuri dreptunghice isoscele, $m(\angle A) = m(\angle BCD) = m(\angle BDE) = 90^\circ$.

- Dacă aria triunghiului $\triangle ABC$ este de 50 u.m.^2 să se calculeze aria poligonului $ABEDC$.
- Dacă lungimea laturii $[CD]$ este de x unități de măsură, iar M este mijlocul segmentului $[DE]$ să se determine lungimea segmentului $[AM]$.



Subiectul 4

Pe latura $[AB]$ a $\triangle ABC$ se consideră punctul M , astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{5}$. Fie $N, R \in (AC)$,

$P, S \in (BC)$ și $Q \in (AB)$, astfel încât $MN \parallel BC$, $NP \parallel AB$, $PQ \parallel AC$, $QR \parallel BC$ și $RS \parallel BA$.

- Să se calculeze $\frac{AN}{NC}$, $\frac{CP}{PB}$, $\frac{BQ}{QA}$.
- Să se arate că $AM = BQ$.
- Să se arate că $SM \parallel AC$.

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;

Timp de lucru – 3 ore.

Barem de corectare
Clasa a VII-a

S1 1.	$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013} - \left(2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{2014}{2013} \right) =$ $= -1 - 1 - 1 - \dots - 1$ $= -2013$ $a = 1, (1) \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10} \right) - 1 =$ $= \frac{10}{9} \left(1 - \frac{1}{10} \right) - 1 = 0$ a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ verificare b) $S^a = 1$	1p 1p 1p 1p
S12.	$\frac{3^{n+1} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+2} + 6 \cdot 3^n \cdot 5^n}{2^{2n+1} \cdot 3^n + 3^{n+1} \cdot 4^n + 2^{n+1} \cdot 6^{n+1}} = \frac{5^n \cdot 34}{2^n \cdot 17}$	3p
S2.1.	$N = \frac{(5+15)^2 + \sqrt{\frac{3}{2^2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} \cdot a^2 - \sqrt{160000}}}{(10+3) \cdot 2 - \sqrt{625}} + a$ $= a^2 + a = a(a+1)$ $\Rightarrow$ nu e patrat perfect	2p 1p
S2. 2.	a, b, c direct prortionale $x, x+1, x+2$ $x = 2$ $a = 14; b = 16; c = 19$	4p
S3	a) $A_{\triangle BCD} = 2A_{\triangle ABC} = 100$ $A_{\triangle BDE} = 2A_{\triangle BCD} = 200$ $A_{ABEDC} = 350 u.m^2$ b) M mijlocul laturii DE $\Rightarrow AMEB$ -paralelogram $\Rightarrow AM = 2x$	3p 4p
S4	a) $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{7} = k$ $\frac{AN}{NC} = \frac{2}{5}$ $\frac{BP}{PC} = \frac{2}{5}$ $\frac{BQ}{AQ} = \frac{2}{5}$	2p

b) $\frac{BQ}{AQ} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{BQ}{7k} = \frac{2}{7} \Rightarrow BQ = 2k = AM$	2p
c) $T.Th. \Rightarrow \frac{CR}{AR} = \frac{BQ}{AQ} = \frac{2}{5}$ $T.Th. \Rightarrow \frac{CS}{BS} = \frac{CR}{AR} = \frac{2}{5}$ $R.T.Th \Rightarrow SM \parallel AC$	3p

OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICA
BLAJ, 16.02.2013
CLASA A VIII-A

Subiectul1

a) Verificati egalitatea:

$$(x-1)^2 + (2y+1)^2 + 4(2-xy) = (x-2y-1)^2 + 9.$$

b) Să se determine numerele $x, y \in [-1, 0]$ care verifică relația:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (2y+1)^2 + 4(2-xy)} + 2x + y = 0$$

Subiectul2

a) Ordonati descrescător numerele reale a, b, c stiind că:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a + 3b + 5c - 8,75.$$

b) Fie $a > 0$ si $b > 0$ două numere reale. Demonstrati că $\frac{a}{3a+b} + \frac{b}{3b+a} \leq \frac{1}{2}$.

Subiectul3.

În prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABC A'B'C'$ avem

$AA' = 4\sqrt{2}$ cm si $AB = 8$ cm. Demonstrati că $BC' \perp AB'$.

Subiectul4.

Se consideră tetraedrul ABCD în care $AD \perp BC$ si $[AB] \equiv [AC]$. Arătați că $\angle ADB \equiv \angle ADC$.

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
Timp de lucru – 3 ore.

Barem de corectare
Clasa a VIII-a

I.	a) $(x-1)^2 + (2y+1)^2 + 4(2-xy) = (x-2y-1)^2 + 9$ verificare b) $\sqrt{(x-1)^2 + (2y+1)^2 + 4(2-xy)} \geq 3$ $2x + y = -3$ $x = y = -1$	3p 4p
II.	a) $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{5}{2}\right)^2 = 0$ $a = \frac{1}{2}; b = \frac{3}{2}; c = \frac{5}{2}$ $c > b > a$ b) $2a(3b+a) + 2b(3a+b) \leq (3a+b)(3b+a)$ $0 \leq (a-b)^2, A$	2p 2p 3p
III.	M, N, P, T – mijloacele $[AB], [B'B], [C'B'], [CB]$ $AB' = BC' = 4\sqrt{6}cm$ $MN \parallel AB'; PN \parallel BC'$ $m(\sphericalangle(AB', BC')) = m(\sphericalangle(PN; MN))$ $MN = NP = 2\sqrt{6}, MT = 4, PT = 4\sqrt{2}$ $PM = 4\sqrt{3}$ $\dots \Rightarrow m(\widehat{MNP}) = 90^\circ = m(\widehat{AB', BC'})$ $AB' \perp BC'$ b) $m(\sphericalangle COY) = m(\sphericalangle AOC) - m(\sphericalangle AOY) = 152^\circ 32'$	7p
IV.	$\left. \begin{array}{l} M \text{ mijl. } [BC] \\ [AB] = [AC] \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp BC$ $BC \perp AD,$ $AD, AM \subset (ADM)$ $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} BC \perp (ADM) \\ DM \perp (ADM) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp DM; M - \text{mijlocul } [BC] \Rightarrow [BD] \equiv [DC]$ $\Rightarrow \triangle ADB \equiv \triangle ADC \Rightarrow \widehat{ADB} \equiv \widehat{ADC}$	7p