

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEN BUZĂU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ Etapa locală 25.02.2017 CLASA a VI-a

Problema 1.

1. La un concurs de matematică, Călin a avut de rezolvat 30 de probleme, fiecare problemă valorând câte unul, două, trei sau patru puncte. El a rezolvat 40% din problemele de câte trei puncte și 30% din problemele de câte patru puncte obținând la acestea un punctaj de două ori mai mare decât suma punctelor obținute din rezolvarea primelor zece probleme de câte un punct sau două puncte. Câte puncte a obținut Călin în total?

2. Să se determine numerele naturale a și b astfel încât $ab - a - 4b = 2013$.

Problema 2.

O semidreaptă (OP se rotește în jurul punctului O dublându-și viteza de rotație în fiecare secundă și parcurge în 5 secunde un unghi de 62° .

- Aflați câte grade a parcurs în fiecare din primele 5 secunde.
- Care este măsura unghiului format de semidreaptă cu poziția inițială după 8 secunde?

Problema 3.

Se consideră un segment $[AB]$ și de o parte și de alta a segmentului punctele C și D astfel încât $\triangle ACB \equiv \triangle BDA$. Fie $P, Q \in [AB]$ astfel încât $[AP] \equiv [PQ] \equiv [QB]$.

- Arătați că $[CP] \equiv [DQ]$;
- Dacă $CP \cap AD = \{S\}$ și $DQ \cap BC = \{T\}$, arătați că $[PS] \equiv [TQ]$

Problema 4.

- Să se arate că dacă numerele n și 5 sunt prime între ele, atunci $n^4 - 1$ se divide cu 5
- Fie $p \geq 5$ un număr prim. Să se arate că numărul $p^4 + p^8 + p^{12} + \dots + p^{8044} - 2011$ se divide cu 60

Notă:

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Punctajul minim de calificare la etapa județeană a olimpiadei de matematică este de 14 puncte.

CLASA a VI-a- Soluții și barem orientativ

Problema 1.

La un concurs de matematică, Călin a avut de rezolvat 30 de probleme, fiecare problemă valorând câte unul, două, trei sau patru puncte. El a rezolvat 40% din problemele de câte trei puncte și 30% din problemele de câte patru puncte obținând la acestea un punctaj de două ori mai mare decât suma punctelor obținute din rezolvarea primelor zece probleme de câte un punct sau două puncte. Câte puncte a obținut Călin în total?

Soluție:

Problemele de câte trei puncte respectiv patru puncte sunt în total 20.

$$\text{Atunci, } 3 \cdot \frac{40}{100} \cdot n + 4 \cdot \frac{30}{100} \cdot (20 - n) = \quad (1p) \quad \frac{12n}{10} + \frac{12 \cdot 20}{10} - \frac{12n}{10} = 24 \text{ puncte. } (1p)$$

$$\text{Atunci, primele zece probleme rezolvate au un număr de } \frac{24}{2} = 12 \text{ puncte. } (1p)$$

$$\text{În total, Călin a obținut } 12 + 24 = 36 \text{ puncte. } (1p)$$

2. Să se determine numerele naturale a și b astfel încât $ab - a - 4b = 2013$.

Soluție:

$$ab - a - 4b + 4 = 2013 + 4 \Rightarrow (1p) \quad (a - 4)(b - 1) = 2017 \quad (1p)$$

$$\text{Rezultă } (a; b) \in \{(5; 2018), (2012; 2)\}. \quad (1p)$$

Problema 2.

O semidreaptă (OP se rotește în jurul punctului O dublându-și viteza de rotație în fiecare secundă și parcurge în 5 secunde un unghi de 62° .

- Aflați câte grade a parcurs în fiecare din primele 5 secunde.
- Care este măsura unghiului format de semidreaptă cu poziția inițială după 8 secunde?

Soluție:

- Se notează cu x numărul de grade parcurs în secunda 1, în următoarele secunde va parcurge 2x, 4x, 8x, 16x.
 $x + 2x + 4x + 8x + 16x = 62$ rezultă $x = 2$ 3p

$$\text{În } \begin{cases} 1'' \rightarrow 2^\circ \\ 2'' \rightarrow 4^\circ \\ 3'' \rightarrow 8^\circ \\ 4'' \rightarrow 16^\circ \\ 5'' \rightarrow 32^\circ \end{cases} \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{b) } \begin{cases} 6'' \rightarrow 64^\circ \\ 7'' \rightarrow 128^\circ \\ 8'' \rightarrow 256^\circ \end{cases} \quad 2^\circ + 4^\circ + \dots + 256^\circ = 510^\circ \text{ parcurge în 8 sec.} \dots \dots \dots 1p$$

$510^\circ - 360^\circ = 150^\circ$ fata de pozitia initiala 2p

Problema 3.

Se consideră un segment $[AB]$ și de o parte și de alta a segmentului punctele C și D astfel încât $\triangle ACB \equiv \triangle BDA$. Fie $P, Q \in [AB]$ astfel încât $[AP] \equiv [PQ] \equiv [QB]$.

- Arătați că $[CP] \equiv [DQ]$;
- Dacă $CP \cap AD = \{S\}$ și $DQ \cap BC = \{T\}$, arătați că $[PS] \equiv [TQ]$

Soluție:

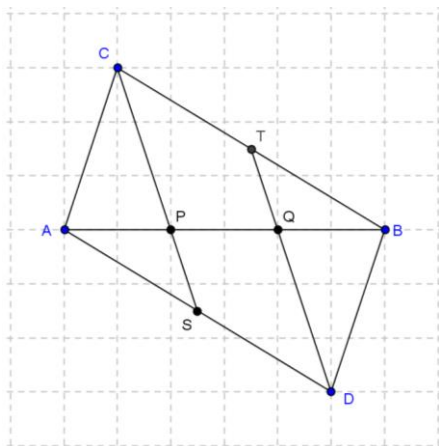


Figura 1p

- $\triangle ACP \equiv \triangle BDQ$ (LUL)..... 2p
Din congruența triunghiurilor rezultă $[CP] \equiv [DQ]$ 1p
- $m(\angle APS) = m(\angle BQT)$ (suplementele $\angle APC$ respectiv $\angle BQD$)..... 1p
 $\triangle APS \equiv \triangle BQT$ (ULU) $\rightarrow [PS] \equiv [TQ]$ 2p

Problema 4.

- Să se arate că dacă numerele n și 5 sunt prime între ele, atunci $n^4 - 1$ se divide cu 5
- Fie $p \geq 5$ un număr prim. Să se arate că numărul $p^4 + p^8 + p^{12} + \dots + p^{8044} - 2011$ se divide cu 60

Soluție:

- Dacă n este număr prim cu 5, atunci n este de forma $n = 5k + r$, $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ 0,50 p
 $n^2 = 5k(5k + 2r) + r^2$ 0,50 p
restul împărțirii lui n la 5 $\in \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow$ restul împărțirii lui n^2 la 5 $\in \{1, 4\}$ 1p
restul împărțirii lui n^4 la 5 este 1 1p
 $n^4 - 1$ se divide cu 5..... 0,50 p
- $N = (p^4 - 1) + (p^8 - 1) + \dots + (p^{8044} - 1)$ 0,50p
Ținând seama de punctul a), fiecare paranteză ce va pare în numărul m se divide cu 5..... 1p
Cum, față de 12, un număr prim are una din formulele $12k + 1$, $12k + 5$, $12k + 7$, $12k + 11$ 1p

Restul împărțirii lui p la $12 \in \{1,5,7,11\}$

Restul împărțirii lui p^2 la $12 \in \{1\}$ **1p**

Prin urmare m se divide cu 12 și în final m se divide cu $5 \cdot 12 = 60$ **0,50p**