

Olimpiada națională de matematică

Etapa locală, 5 martie 2016, Caraș - Severin

Clasa a XII a (Barem de corectare și notare)

1. a) elementul neutru este 3	1p
2p – elementele simetrizabile sunt 2 și 4	2p
b) se demonstrează că $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{2016} = (x-3)^{2016} + 3$	3p
numerele reale căutate sunt 2 și 4	1p

2. a) Pare normal să căutăm o funcție de gradul al treilea, ținând cont mai ales de apariția în dreapta a numărului $\frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 dx$; un exemplu este $f(x) = x^3 + k, k \in \mathbb{Z}$.	4p
b) Folosind metoda integrării prin părți poate ne vin idei, dar nu e obligatoriu... Un exemplu este în final $f(x) = x^3$.	3p

3. Derivata funcției $g : \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{\cos x}$ este $g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	2p
$f(x) = g'(x) \cdot e^x + g(x) \cdot e^x$, folosirea metodei integrării prin părți	2p
$F(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot e^x + k$	2p
$F(0) = 1 \Rightarrow k = 0$, de unde $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}}$.	1p

4. a) Cum $a \circ b = c$ și $c \circ b = a$, deducem $c \circ b \circ b = c$.	2p
Deoarece G este grup se ajunge la $b \circ b = e$.	1p
Cum $ G = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, se obține imediat $b = e$.	1p
Revenind în $a \circ b = c$, rezultă $a = c$.	1p
b) De exemplu, $a = \hat{0}, b = \hat{2}, c = \hat{2}$ îndeplinesc condițiile cerute. (verificare !)	2p