



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013**

CLASA a XII - a

1. Fie A un inel în care $1 \neq 0$ cu proprietățile:

- i. $a^4 = a^3$, oricare ar fi $a \in A$;**
- ii. dacă $a, b \notin U(A)$, atunci $a+b \notin U(A)$, unde $U(A)$ este mulțimea elementelor inversabile din inel.**

Să se arate că $A = \mathbb{Z}_2$.

Rezolvare:

Pentru $a = -1$, cf pct i., $(-1)^4 = (-1)^3$, de unde $1 = -1$, adică $1+1=0$ 1p

Aplicând i. pentru $a+1$ se obține $(a+1)^4 = (a+1)^3 \Leftrightarrow a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \Leftrightarrow a^4 = a^3 + a^2 + a$
 $\Leftrightarrow a^2 + a = 0$ oricare ar fi $a \in A$, adică $a(1-a)=0$. 3p

Dacă a și $1-a \neq 0$, atunci ele sunt elemente neinvertibile $\Rightarrow a+1-a=1$ este neinvertibil.

Contradicție 2p

Rezultă $a=0$ sau $a=1$. Deci $A = \mathbb{Z}_2$. 1p

2. Să se determine numărul automorfismelor grupului $(\mathbb{Z}_{2011}, +)$.

Rezolvare:

2011 este număr prim $\Rightarrow (\mathbb{Z}_{2011}, +)$ este grup ciclic, iar orice element $k \in \mathbb{Z}_{2011}$, $k \neq 0$ are ordinal 2011. 2p

Fie $f: \mathbb{Z}_{2011} \rightarrow \mathbb{Z}_{2011}$ un automorfism al grupului, $f(x+y)=f(x)+f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}_{2011}$.

Obținem $f(k) = k f(1)$ 3p

Cum f este inversabilă, adică surjectivă, se obțin 2010 automorfisme. 2p

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, continuă, cu proprietatea $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$. Să se calculeze

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+f(x)} \cdot \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezolvare:

Cu substituția $x = -t$ obținem $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+f(t)} \cdot \frac{\sin^{2n} t}{\sin^{2n} t + \cos^{2n} t} dx$. Atunci $2I =$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx. \quad 3p$$

Cu substituția $x = \frac{\pi}{2} - t$ obținem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx, \text{ de unde } 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \text{ și } I = \frac{\pi}{4}. \quad 4p$$

4. Fie șirul $a_n = \int_1^n \frac{1+\ln(1+\ln x)}{1+x^4} dx$, $n \geq 1$. Să se arate că șirul este convergent și că limita sa este mai mică decât $\frac{1}{2}$.

Rezolvare:

Fie $F(x) = \int_1^x \frac{1+\ln(1+\ln t)}{1+t^4} dt$. $F'(x) = \frac{\ln(1+\ln x)}{1+x^4} > 0, \forall x > 1$.

Obținem că F este crescătoare $\Rightarrow F(n) < F(n+1) \Rightarrow a_n < a_{n+1} \Rightarrow$ șirul a_n este crescător $\Rightarrow a_n$ este mărginit inferior. 2p

$$\ln x < x, x \geq 1 \Rightarrow 1 + \ln x < 1 + x \Rightarrow \ln(1 + \ln x) < \ln(1 + x) \Rightarrow \ln(1 + \ln x) < x \Rightarrow \frac{\ln(1 + \ln x)}{1 + x^4} < \frac{x}{1 + x^4} \Rightarrow \int_1^n \frac{1 + \ln(1 + \ln x)}{1 + x^4} dx < \int_1^n \frac{x}{1 + x^4} dx \Rightarrow a_n < \int_1^n \frac{x}{1 + x^4} dx. \quad 2p$$

Calculăm $\int_1^n \frac{x}{1+x^4} dx$ și obținem $a_n < \frac{\pi}{8} \Rightarrow$ șirul este mărginit superior, deci convergent 2p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \frac{\pi}{8} < \frac{1}{2}. \quad 1p$$