



Barem de notare și evaluare
Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală, 8 februarie 2025
Clasa a IX-a

Subiectul 1	
Ecuția devine $3\{x\} = 2[x] + 1 - \left[x + \frac{1}{2}\right] \in \mathbb{Z}$	
Cum $3\{x\} \in [0,3)$, deducem că $3\{x\} \in \{0,1,2\}$, deci $\{x\} \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.	1p
Pentru $\{x\} = 0$, $x \in \mathbb{Z}$ și atunci $\left[x + \frac{1}{2}\right] = x$, $[x] = x$.	1p
Astfel, ecuația devine $x = 2x + 1$, deci $x = -1$.	1p
Pentru $\{x\} = \frac{1}{3}$, avem $\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[x\right] + \frac{5}{6} = [x]$, ecuația devine	1p
$[x] = 2[x] - 1 + 1$, $[x] = 0$ și $x = \frac{1}{3}$.	1p
Pentru $\{x\} = \frac{2}{3}$, avem $\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[x\right] + \frac{7}{6} = [x] + 1$, ecuația devine	1p
$[x] + 1 = 2[x] - 2 + 1$, $[x] = 2$ și $x = \frac{8}{3}$.	1p
TOTAL	7p
Subiectul 2	
Din $ab + ac + bc = \sqrt{3abc} \Rightarrow (ab + ac + bc)^2 = 3abc$.	1p
Cum $a + b + c = 1$, putem scrie $(ab + ac + bc)^2 = 3abc(a + b + c)$.	2p
Atunci $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = a^2bc + ab^2c + abc^2$.	1p
Relația de mai sus devine	
$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 = 0$ și astfel avem	
$(ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 + (ac - ab)^2 = 0$, de unde	1p
$ab = ac = bc$.	1p
Rezultă $\frac{abc}{ab} = \frac{abc}{bc} = \frac{abc}{ac}$, astfel vom obține $a = b = c = \frac{1}{3}$.	1p
TOTAL	7p

Subiectul 3	
$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{EA}.$ Prin urmare, $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}.$ Cum $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DC}$, vom obține că $2(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}) = \vec{0}.$ Notăm $AF = x, BD = y, CE = z.$ Astfel, avem $\overrightarrow{AF} = \frac{x}{x+y} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} = \frac{y}{z+y} \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CE} = \frac{z}{x+z} \overrightarrow{CA}.$ $\begin{aligned} \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} &= \frac{x}{x+y} \overrightarrow{AB} + \frac{y}{z+y} \overrightarrow{BC} + \frac{z}{x+z} \overrightarrow{CA} \\ &= \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{z+y} \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{y}{z+y} - \frac{z}{x+z} \right) \overrightarrow{AC} = \vec{0}, \end{aligned}$ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sunt vectori necoliniari, deci $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{z+y} = 0$ și $\frac{y}{z+y} - \frac{z}{x+z} = 0.$ Prin urmare, $y^2 = xz, z^2 = yx$ și apoi $x^2 = yz.$ Astfel, $x^2 + y^2 + z^2 = xz + yx + yz$ $\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yx - 2yz = 0$ $\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ echilateral.}$	1p 2p 1p 1p 1p 1p
TOTAL	7p
Subiectul 4	
Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz, obținem $\begin{aligned} (abc + a^2b + bcb + cac)^2 &\leq \\ &\leq (a^2b^2 + a^4 + b^2c^2 + c^2a^2)(c^2 + b^2 + b^2 + c^2) \\ &= 2(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2). \end{aligned}$ Astfel, $abc + a^2b + b^2c + c^2a \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}. (1)$ Din nou cu inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem, $\begin{aligned} (a^2 + b^2)^2 &= (\sqrt{a} \cdot a\sqrt{a} + \sqrt{b} \cdot b\sqrt{b})^2 \leq \\ &\leq (\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2)((a\sqrt{a})^2 + (b\sqrt{b})^2) = (a + b)(a^3 + b^3). \end{aligned}$	1p 1p 1p



Întrucât $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, se obține $(a^2+b^2)^4 \leq (a+b)^2(a^3+b^3)^2 \leq 2(a^2+b^2)(a^3+b^3)^2 \Rightarrow$ $(a^2+b^2)^3 \leq 2(a^3+b^3)^2.$ Analog, $(a^2+c^2)^3 \leq 2(a^3+c^3)^2, (c^2+b^2)^3 \leq 2(c^3+b^3)^2.$ Prin urmare, $(a^2+b^2)^3(a^2+c^2)^3(c^2+b^2)^3 \leq 8(a^3+b^3)^2(a^3+c^3)^2(c^3+b^3)^2 = 18^3$ $\Rightarrow (a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2) \leq 18 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} abc + a^2b + b^2c + c^2a \leq 6.$	2p 1p 1p
TOTAL	7p