

Soluții clasa a X-a:

1. a) Notăm $2^x = t > 0$ și ecuația devine: $\frac{t}{2 \cdot t^2 - 6t + 6} - \frac{t}{t^2 - 4t + 3} = 3$

adică $\frac{1}{2(t + \frac{3}{t}) - 6} - \frac{1}{(t + \frac{3}{t}) - 4} = 3$.

Cu notația $t + \frac{3}{t} = u$ se obține $\frac{1}{2u-6} - \frac{1}{u-4} = 3$, echivalentă cu ecuația

$$6u^2 - 41u + 70 = 0, \text{ cu soluțiile } u_1 = \frac{7}{2} \text{ și } u_2 = \frac{10}{3}.$$

Făcând calculele obținem $t_1 = 2$ și $t_2 = \frac{3}{2}$, de unde $x = 1$ sau

$$x = \log_2 3 - 1.$$

b) Notăție:

$$2x + 1 = a, \quad 4x + 5 = b, \quad 5x - 3 = c;$$

$$a + b + c = (2x + 1) + (4x + 5) + (5x - 3) = 11x + 3$$

Prin ridicarea la cub se obține:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c) \\ \Rightarrow 3(a + b)(a + c)(b + c) = 0 \Rightarrow$$

$$a + b = 0 \quad x = -1;$$

$$a + c = 0 \quad x = \frac{2}{7};$$

$$b + c = 0 \quad x = -\frac{2}{9}.$$

2. Cum $a + b^2 \geq 4ab$ și $ab > 1$, obținem că $\log_{ab} a + b^2 \geq \log_{ab} 4ab$ sau echivalent

$$2\log_{ab} a + b \geq 2\log_{ab} 2 + 1, \text{ de unde obținem } \log_{ab} a + b \geq \frac{1}{\log_2 a + \log_2 b} + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Analog } \log_{bc} b + c \geq \frac{1}{\log_2 b + \log_2 c} + \frac{1}{2} \text{ și } \log_{ca} c + a \geq \frac{1}{\log_2 c + \log_2 a} + \frac{1}{2}.$$

Prin adunarea celor trei inegalități obținem:

$$\log_{ab} a + b + \log_{bc} b + c + \log_{ca} c + a \geq \frac{1}{\log_2 a + \log_2 b} + \frac{1}{\log_2 b + \log_2 c} + \frac{1}{\log_2 c + \log_2 a} + \frac{3}{2} \geq$$

$$\geq \frac{1+1+1^2}{\log_2 a + \log_2 b + \log_2 b + \log_2 c + \log_2 c + \log_2 a} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2\log_2 abc} + \frac{3}{2} = 3.$$

Egalitatea are loc pentru $a = b = c = 2$.

3. Fie xOy un sistem de axe de coordonate cu originea în punctul O al cercului $\mathcal{C}(O, R)$, astfel încât $A_1 \in Ox$. Se notează cu

$z, z_1, z_2, \dots, z_n$ afixele punctelor $M, A_1, A_2, \dots, A_n$. Deoarece

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}(O, R)$, $z_1, z_2, \dots, z_n$ sunt rădăcinile ecuației

$$z^n = R^n \Rightarrow z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0 (*).$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n MA_k &= \sum_{k=1}^n |z - z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k| \cdot \left| \frac{z - z_k}{z_k} \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \cdot \left| \frac{z \cdot \overline{z_k}}{z_k \cdot \overline{z_k}} - 1 \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \cdot \left| \frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} - 1 \right| = \sum_{k=1}^n R \cdot \left| \frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} - 1 \right| \geq \\ &\geq R \left| \sum_{k=1}^n \left(\frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} - 1 \right) \right| = R \left| \frac{z}{R^2} \sum_{k=1}^n \overline{z_k} - n \right| = R \left| \frac{z}{R^2} \cdot \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)} - n \right| = R \left| \frac{z}{R^2} \cdot 0 - n \right| = nR \quad (1). \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n MA_k = \sum_{k=1}^n |z - z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z| + \sum_{k=1}^n |z_k| = nR + nR = 2nR \quad (2).$$

Concluzia problemei se deduce din relațiile (1), (2).

4. a) Dacă

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow x_1^{2015} - 2014 \cdot f(x_1) = x_2^{2015} - 2014 \cdot f(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^{2015} = x_2^{2015} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ injectivă.}$$

b) Din: $x=2 \Rightarrow f(2) + f(4) + f(1) = 2015(*)$;

$$x=4 \Rightarrow f(4) + f(16) + f(2) = 2015(**).$$

Scăzând cele două relații se obține: $f(1) = f(16) \Rightarrow f$ neinjectivă.

Barem de corectare

Clasa a X-a

Problema 1	Oficiu	1 p
a) $\frac{t}{2 \cdot t^2 - 6t + 6} - \frac{t}{t^2 - 4t + 3} = 3$		2p
$\frac{1}{2(t + \frac{3}{t}) - 6} - \frac{1}{(t + \frac{3}{t}) - 4} = 3$		1p
$6u^2 - 41u + 70 = 0$		1p
Finalizare		1p
b)		
$a + b + c = (2x + 1) + (4x + 5) + (5x - 3) = 11x + 3$		1p
Ridicarea la cub		2p
Finalizare		1p
TOTAL		10p

Problema 2	Oficiu	1 p
$a + b^2 \geq 4ab$		1 p
$\log_{ab} a + b^2 \geq \log_{ab} 4ab$		1 p
$\log_{ab} a + b \geq \frac{1}{\log_2 a + \log_2 b} + \frac{1}{2}$		3p
$\log_{ab} a + b + \log_{bc} b + c + \log_{ca} c + a \geq$		
$\geq \frac{1}{\log_2 a + \log_2 b} + \frac{1}{\log_2 b + \log_2 c} + \frac{1}{\log_2 c + \log_2 a} + \frac{3}{2} \geq$		2p
$\geq \frac{1+1+1^2}{\log_2 a + \log_2 b + \log_2 b + \log_2 c + \log_2 c + \log_2 a} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2\log_2 abc} + \frac{3}{2} = 3.$		2p
TOTAL		10p

Problema 3	Oficiu 1p
$z, z_1, z_2, \dots, z_n$ afixele punctelor $M, A_1, A_2, \dots, A_n$	1p
$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}(O, R)$, $z_1, z_2, \dots, z_n$ sunt rădăcinile ecuației	2p
$z^n = R^n \Rightarrow z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0 (*)$	
$\sum_{k=1}^n MA_k = \sum_{k=1}^n z - z_k = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \left \frac{z - z_k}{z_k} \right = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \left \frac{z \cdot \overline{z_k}}{z_k \cdot \overline{z_k}} - 1 \right = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \left \frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} - 1 \right = \sum_{k=1}^n R \cdot \left \frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} - 1 \right $	2p
$\sum_{k=1}^n MA_k \geq nR$	2p
$\sum_{k=1}^n MA_k \leq 2nR$	1p
Finalizare	1p
TOTAL	10p

Problema 4	Oficiu 1 p
$f x_1 = f x_2 \Rightarrow f f x_1 = f f x_2$	2p
$x_1^{2015} - 2014 \cdot f x_1 = x_2^{2015} - 2014 \cdot f x_2$	2p
$x_1^{2015} = x_2^{2015} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ injectivă	2p
$x = 2 \Rightarrow f 2 + f 4 + f 1 = 2015$	1p
$x = 4 \Rightarrow f 4 + f 16 + f 2 = 2015$	1p
$f 1 = f 16 \Rightarrow f$ neinjectivă	1p
TOTAL	10p