

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17.02.2018
Clasa a XI-a

Barem de corectare și notare

(1) (a) Prin împărțire cu $D(x, 1, -2) = (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-x & 2 \\ -4 & -4 & -3-x \end{vmatrix} = (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-x & 0 \\ -4 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (x-1)^3$ se obține evident soluția unică $x=1$	(3p)
(b) Folosind din nou proprietățile determinantilor se ajunge la $D(a, b, c) = (a+b+c)^3$	(2p)
Inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică, apoi inegalitatea din enunț, conduc la inegalitatea de demonstrat.	(2p)
(2) (a) (i) $A(t) \cdot A(u) = A(t+u) \in H$	(3p)
(i) Se demonstrează inductiv că $A^n(t) = A(nt), \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ de unde avem că $A^{2018}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -I_2 \Rightarrow k = -1 \in \mathbb{Z}$	(2p)
(b) De exemplu $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z+iz & -1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C}$ oferă răspunsul (evident este necesară verificarea și, ideal, modul în care s-a ajuns la această formă); Simplele încercări care conduc la rezultate intermediare utile se notează corespunzător.	(2p)
(3) $a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx} - n}{nx} = \frac{1}{n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} + \dots + n \cdot \frac{e^{nx} - 1}{nx} \right) = \frac{n+1}{2}$	(2p)
$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$	(2p)
$L_2 = 0$	(1p)
$L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{n+1};$ $y_n = \sqrt[n+1]{n+1} - 1 > 0 \Rightarrow (1+y_n)^{n+1} \geq C_{n+1}^2 \cdot y_n^2 = \frac{(n+1)n}{2} \cdot y_n^2 \Rightarrow$ $0 < y_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \Rightarrow L_3 = 1$	(2p)
(4) Inductiv se demonstrează imediat că $x_n > 0, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.	(3p)



$x_1 = 2 > \sqrt{2}$ și , folosind inegalitatea mediilor, avem că $x_{n+1} \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ așa- dar $x_n \geq \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	
$x_{n+1} - x_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$	(2p)
Fiind descrescător și mărginit, șirul este convergent, având limita finită L ; Prin trecere la limită în relația de recurență se ajunge la $L = \sqrt{2}$	(2p)