

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 1.

$$\text{Să se calculeze } \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx$$

Soluție:

$$\varphi(x) = 2\pi - x; \quad \varphi^{-1}(x) = 2\pi - x;$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2\pi - x}{\cos x} (-1) \cdot dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{2\pi - x}{\cos x} \cdot dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{2\pi}{\cos x} \cdot dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx \dots \dots 3p$$

$$\Rightarrow I = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \cdot dx = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \cdot dx = -\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t^2 - 1} \cdot dt =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\pi}{2} \ln \left| \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1} \right| =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right| = -\frac{\pi}{2} \ln(\sqrt{2}+1)^2 = -\pi \ln(\sqrt{2}+1) \dots \dots \dots 4p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 2.

Pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$ notăm $I_{m,n} = \int_0^1 x^m \operatorname{tg}^n x dx$. Să se calculeze $\lim_{m \rightarrow \infty} I_{m,2020}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{1,n}$.

Soluție (barem de corectare)

Funcția tangentă este crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $0 \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} 1 \quad \forall x \in [0, 1]$,

deci $0 \leq \operatorname{tg}^{2020} x \leq (\operatorname{tg} 1)^{2020} \quad \forall x \in [0, 1]$ 1p

Atunci

$$0 \leq I_{m,2020} = \int_0^1 x^m \operatorname{tg}^{2020} x dx \leq (\operatorname{tg} 1)^{2020} \int_0^1 x^m dx = \frac{(\operatorname{tg} 1)^{2020}}{m+1} \rightarrow 0, \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} I_{m,2020} = 0 \quad \dots\dots\dots 2p$$

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{\pi}{4} < \alpha < 1$ 1p

$$I_{1,n} = \int_0^1 x \operatorname{tg}^n x dx \geq \int_{\alpha}^1 x \operatorname{tg}^n x dx \geq \alpha \int_{\alpha}^1 \operatorname{tg}^n x dx \geq \alpha \int_{\alpha}^1 \operatorname{tg}^n x dx \geq \alpha = \alpha(1 - \alpha) \dots\dots\dots 2p$$

Cum $\operatorname{tg} \alpha > 1$ și $1 - \alpha > 0$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{1,n} = \infty$ 1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 3.

Considerăm H_1, H_2, H_3 subgrupuri ale lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ avînd m, n respectiv p elemente, unde $(m, n) = 1$, $(n, p) = 1$ și $(m, p) = 1$. Să se determine numărul elementelor mulțimii $H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

Soluție:

H subgrup cu n elemente a lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

$$H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Rightarrow H = \{xx_1, xx_2, \dots, xx_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ pentru } \forall x \in H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (xx_1)(xx_2) \dots (xx_n) = x_1x_2 \dots x_n \Rightarrow x^n = 1 \Rightarrow H = U_n \dots \dots \dots 2p$$

Dacă $(m, n) = 1$ și x_0 rădăcină comună a ecuațiilor

$$x^m = 1 \text{ și } x^n = 1 \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} \text{ și } 1 = km + ln \Rightarrow$$

$$x_0 = x_0^{km+ln} = (x_0^m)^k \cdot (x_0^n)^l = 1 \dots \dots \dots 3p$$

Dacă notăm $n(A)$ numărul de elemente ale mulțimii $A \Rightarrow$

$$n(H_1 \cup H_2 \cup H_3) =$$

$$= n(H_1) + n(H_2) + n(H_3) - n(H_1 \cap H_2) - n(H_1 \cap H_3) - n(H_2 \cap H_3) + n(H_1 \cap H_2 \cap H_3)$$

$$= m + n + p - 2 \dots \dots \dots 2p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 4.

Fie A un inel și $a, b \in A$ cu proprietatea că $a^2 + b^2 = ab$. Să se arate că $(ab)^2 = b^2a^2$ și $(ba)^2 = a^2b^2$.

Soluție (barem de corectare)

Din ipoteză obținem: $a(a^2 + b^2) = a^2b, (a^2 + b^2)b = ab^2$ și prin adunarea celor două avem

$$a^3 + b^3 = 0 \quad (1) \dots\dots\dots 2p$$

Din $a^2(a^2 + b^2) = a^3b$ și din (1) obținem $a^2b^2 = -a^4 - b^4, (2) \dots\dots\dots 1p$

$$b(a^2 + b^2)a = baba \Rightarrow ba^3 + b^3a = (ba)^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (ba)^2 = -a^4 - b^4 \dots\dots\dots 1p$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} (ba)^2 = a^2b^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$(ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + a^2b^2 + b^2a^2 \stackrel{(2)}{=} a^4 + b^4 - a^4 - b^4 + b^2a^2 = b^2a^2 \dots\dots\dots 2p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;