



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A XI-A
Matematică-informatică

SUBIECTUL I (7puncte)

Fie matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$

4p a) Determinați numărul real a pentru care avem egalitatea ${}^t(A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4043 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

unde am notat cu tX transpusa matricei X .

3p b) Calculați A^{2020} .

SUBIECTUL II (7puncte)

Se consideră numerele reale $a, b, c \in \mathbb{N}$ și determinanții: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ și

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

3p a) Să se arate că $\Delta_1 = (a-b)(b-c)(c-a)$.

2p b) Să se verifice dacă $\Delta_1 = \Delta_2$.

2p c) Să se arate că aria triunghiului care are ca vârfuri 3 puncte distincte situate pe graficul funcției, având coordonate numere naturale, este număr natural.

SUBIECTUL III (7puncte)

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit de $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{1^2+2^2+\dots+n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4p a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{3} \cdot a_n \right)^{n-1}$

3p b) Aflați $p \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\operatorname{tg}(p \cdot a_n)}{\ln(1 + (1+p) \cdot a_n)} \right) = \frac{2020}{2021}$.

SUBIECTUL IV (7 puncte)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{ax^2 + bx + 2020}} - x$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați parametrii reali a și b astfel încât graficul funcției să admită ca asimptotă orizontală la $+\infty$ dreapta $y = 1$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.