



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 19.02.2017

Filiera teoretică: profil real, specializarea științele naturii
Clasa a XI-a

1. Să se arate că dacă $A \in M_2(\mathbb{C})$, $A \neq O_2$ și există un număr natural n , $n > 0$ astfel încât $A^n = O_2$ atunci $A^2 = O_2$.
2. Se consideră funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și matricele $A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$.
 - a) Să se arate că $|\det(B)| = 3\sqrt{3}$
 - b) Să se arate că $A \cdot B = \begin{pmatrix} f(1) & f(x_1) & f(x_2) \\ f(1) & x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) \\ f(1) & x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) \end{pmatrix}$
 - c) Să se arate că $\det(A) = 0$ dacă și numai dacă $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.
 - a) Să se determine asimptotele verticale ale graficului funcției
 $g: D \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln(f(x))$, unde D este domeniul maxim de definiție la funcției g
 - b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(1) + f(2) + \dots + f(x)]^{x^2}$
 - c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot [2017^{f(x)+1} - 2017]$
4.
 - a) Pentru ce valori $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx}{x + x^2} = 30$$
 - b) Să se calculeze: $\lim_{x \rightarrow \infty} a\sqrt{x+1} + b\sqrt{x+2} + c\sqrt{x+3}$, discuție după $a, b, c \in \mathbb{R}$

Notă:

Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7