OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 9 FEBRUARIE 2013

Clasa a VII-a

Problema 1. a) Un număr natural se numește „*enigmatic*” dacă prima cifră a numărului este 9 și dacă se mută această cifră la sfârşitul numărului, numărul obţinut este de patru ori mai mic decât numărul iniţial. Arătați că mulțimea numerelor „*enigmatice*” este diferită de mulțimea vidă.

Georgeta Cioboată, Călărași

b) Găsiți toate numerele $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,7\}$ cu proprietatea $\frac{1}{k-7}-\frac{1}{k}=\frac{1}{14}$.

Eugen Predoiu și Marin Neață, Călărași

Problema 2. Să se calculeze:

a) $S_1=\sqrt{\left[\sqrt{1\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 5}\right]+\left[\sqrt{5\cdot 7}\right]+\cdots+\left[\sqrt{2011\cdot 2013}\right]}$; $\left([x]\right.$ este partea întreagă a numărului real $\left.x\right)$

Gheorghe Fianu, Perișoru

b) $S_2=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2012^2}+\frac{1}{2013^2}}$.

Cristina Bornea, Călărași

Problema 3. Fie un ΔABC cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$. Se construieşte pătratul *BDEC* în semiplanul delimitat de *BC* care nu îl conţine pe *A*. Bisectoarea unghiului *A* intersectează laturile [*BC*] şi [*DE*] în *F* respectiv *G*. Dacă $|AB|=16cm$ și $|AC|=4cm$, calculaţi aria patrulaterului *BDGF*.

Cristina Bornea, Călărași

Problema 4. a) Dacă măsurile unghiurilor *A*, *B*, *C*, *D*, ale patrulaterului convex *ABCD*, sunt direct proporționale cu patru numere naturale consecutive, să se demonstreze că *ABCD* este trapez.

b) Fie O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD ale trapezului $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Prin punctul O ducem paralela OM la latura AD, $M \in AB$ și notăm cu N simetricul punctului M față de mijlocul laturii AB. Să se demonstreze că $ON \parallel BC$.

Relu Ciupea, Oltenița

SUCCES!

Baremul de notare este: Problema 1. a) 4 puncte; b) 3 puncte; **Problema 2.** a) 4 puncte; b) 3 puncte; **Problema 3. 7** puncte; **Problema 4. a**) 3 puncte; b) 4 puncte.

Str. Sloboziei, nr. 28, 910001
Mun. Călărași, Jud. Călărași
Tel: +40 0242 315 949
Fax: +40 0242 312 810
www.isj.cl.edu.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 9 FEBRUARIE 2013

Clasa a VII-a

Problema 1. a) Un număr natural se numește „*enigmatic*" dacă prima cifră a numărului este 9 și dacă se mută această cifră la sfârşitul numărului, numărul obţinut este de patru ori mai mic decât numărul iniţial. Arătați că mulțimea numerelor „*enigmatice*" este diferită de mulțimea vidă.

Soluție

$\overline{9a} = 4 \cdot \overline{a9}$ ……………………………………………………………………………………1p

Rezolvarea ecuației $39 \cdot \overline{a} = 9 \cdot (10^n - 4)$ ………………………………..……………………………2p

Finalizare (soluția este 923076) ………………………………...………………………………1p

b) Găsiți toate numerele $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,7\}$ cu proprietatea $\frac{1}{k-7} - \frac{1}{k} = \frac{1}{14}$.

Soluție

$k(k-7) = 98$ ……………………………………………………………………………………1p

$k = -7$ și $k = 14$ soluții ……………………………………………...……………………………1p

$\forall k \in \mathbb{Z} - \{-7,14\}$ nu este soluție soluții ……………… ...……………………...……………………1p

Problema 2. Să se calculeze:

a) $S_1 = \sqrt{\left[\sqrt{1\cdot 3}\right] + \left[\sqrt{3\cdot 5}\right] + \left[\sqrt{5\cdot 7}\right] + \cdots + \left[\sqrt{2011\cdot 2013}\right]}$; $([x]$ este partea întreagă a numărului real $x)$

Rezolvare

$(2k-1)^2 < (2k-1)\cdot(2k+1) < (2k)^2$ $, k \in N^*$ ……………………………………………………………1p

$\left[\sqrt{(2k-1)\cdot(2k+1)}\right] = (2k-1)$ ……………………………………………………………………1p

finalizare $S_1 = 1006$ ………………………………………………………………………………..2p

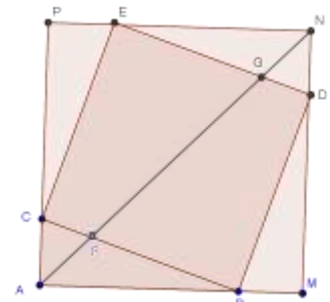
b) observă $\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = 1 + \frac{1}{k(k+1)}$ ……………………………………………………………2p

finalizare $S_2 = 2013 - \frac{1}{2013}$. ………………………………………………………………………...1p

Problema 3. Fie un ΔABC cu $m(\measuredangle A) = 90^\circ$. Se construieşte pătratul *BDEC* în semiplanul delimitat de *BC* care nu îl conţine pe *A*. Bisectoarea unghiului *A* intersectează laturile [*BC*] şi [*DE*] în *F* respectiv *G*. Dacă $|AB| = 16cm$ şi $|AC| = 4cm$, calculaţi aria patrulaterului *BDGF*.

Soluţie:

Desen ……………………………………………………………………………..1p



$\Delta ABC \equiv \Delta BMD([BC]\equiv[BD], \measuredangle ABC \equiv \measuredangle BDM) \Rightarrow [AC]\equiv[BM]$ (1) 1p

$\Delta BMD \equiv \Delta DNE([ED]\equiv[BD], \measuredangle BDM \equiv \measuredangle DEN) \Rightarrow [BM]\equiv[ND]$ (2) 1p

Din (1) si (2) $\Rightarrow [AC]\equiv[ND]$ 1p

$\Delta ACF \equiv \Delta NGD(L.U.L)(\measuredangle CAF \equiv \measuredangle GND, [AC]\equiv[ND], \measuredangle ACF \equiv \measuredangle GDN)$ 1p

$A_{ABC} = A_{ACF} + A_{AFB} = A_{GND} + A_{AFB}$

$A_{BDGF} = A_{AMN} - 2\cdot A_{ABC}$ 1p

$A_{BDGF} = 200-64 \Rightarrow A_{BDGF} = 136cm^2$ 1p

Problema 4. a) Măsurile unghiurilor A, B, C, D ale patrulaterului convex $ABCD$ sunt direct proporționale cu patru numere naturale consecutive. Să se demonstreze că $ABCD$ este trapez.

b) Fie O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD ale trapezului $ABCD, AB \| CD, AB > CD.$ Prin punctul O ducem paralela OM la latura AD, $M \in AB$ și notăm cu N simetricul punctului M față de mijlocul laturii $AB.$ Să se demonstreze că $ON \| BC.$

Soluție :

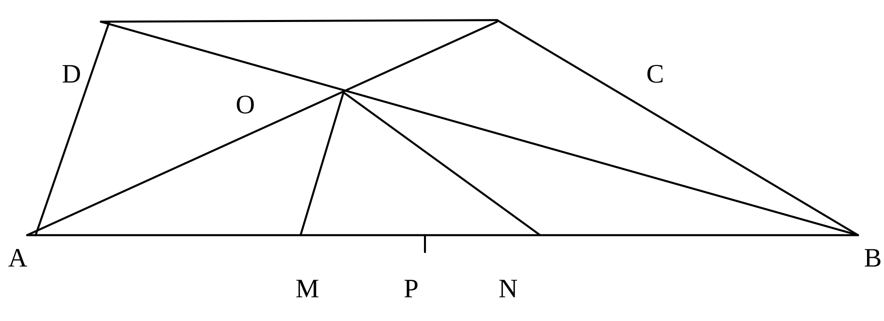
a) Notând cu a,b,c,d măsurile celor patru unghiuri ale patrulaterului și cu $n, n+1, n+2, n+3$ cele patru numere naturale consecutive , conform enunțului vom obține :

$\frac{a}{n}=\frac{b}{n+1}=\frac{c}{n+2}=\frac{d}{n+3}=\frac{a+b+c+d}{n+n+1+n+2+n+3}=\frac{360}{4n+6}=\frac{360}{2\cdot(2n+3)}=\frac{180}{2n+3}$ (1) 1p

Pe de altă parte $\frac{b}{n+1}=\frac{c}{n+2}=\frac{b+c}{n+1+n+2}=\frac{b+c}{2n+3}$ (2) 1p

Din (1) și (2) rezultă $\frac{b+c}{2n+3}=\frac{180}{2n+3} \Rightarrow b+c=180 \Rightarrow AB \| CD \Rightarrow ABCD=$ trapez 1p

b) desen 1p



$OM \| AD \Rightarrow \frac{BO}{OD}=\frac{BM}{MA}$ (Teorema lui Thales în ΔBAD) 1p

$\frac{BO}{OD}=\frac{AO}{OC}$ (Teorema lui Thales în ΔAOB)

Din cele două relații rezultă $\frac{AO}{OC}=\frac{BM}{MA}$ (1) 1p

Deoarece P este mijlocul lui AB rezultă $PA=PB$

Deoarece N este simetricul punctului M față de P rezultă $PM=PN$

Prin scăderea respectiv adunarea ultimelor două egalități se obține :

$PA - PM = PB - PN \Rightarrow MA = NB\ (2)$

și $PA + PN = PB + PM \Rightarrow NA = MB\ (3)$

Din (1), (2) și (3) rezultă $\frac{AO}{OC} = \frac{AN}{NB}$ și conform reciprocei Teoremei lui Thales $\Rightarrow ON \parallel BC$ 1p