

## Olimpiada națională de matematică, faza locală, județul Caraș-Severin, 2016

## Clasa a IX-a

I. Pentru orice numere naturale nenule  $m$  și  $n$  se notează  $E(m, n) = \sqrt{m^2 + 3n}$ .

(a) Determinați numerele naturale  $m$  pentru care  $(m+1) \cdot E(m, m) = 3m+1$ .

(b) Calculați partea întreagă a numărului  $E(n, n)$ .

(c) Arătați că dacă  $m, n, p \in \mathbb{N}^*$  și  $m^2 + n^2 < 2p^2$ , atunci  $E(m, m) \cdot E(n, n) < E^2(p, p)$ .

Articol RMCS nr. 25, enunț modificat, Lucian Dragomir

II. Se consideră un triunghi  $ABC$  și punctele  $M, N, P$  pe laturile  $[BC], [AC]$ , respectiv  $[AB]$ ,

$$\text{pentru care } \frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Demonstrați că, dacă  $2 \cdot \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PN}$  și  $2 \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC}$ , atunci  $\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{EF}$ .

Gazeta Matematică (12/2014, Nicolae Stăniloiu)

III. Se consideră o mulțime  $M$  de numere reale care are următoarele două proprietăți:

(1)  $1 \in M$ .

(2) dacă  $x \in M$  și  $(x+2y) \in M$ , atunci  $y \in M$ .

Arătați că:

(a)  $\frac{1}{4} \in M$ ;

(b)  $\frac{1}{2^n} \in M$  pentru orice număr natural  $n$ .

Gazeta Matematică (supliment 12/2014, Lucian Dragomir)

IV. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x - 3$  și mulțimea  $M_f = \{g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f \circ g = g \circ f\}$ .

(a) Arătați că  $M_f \neq \emptyset$ .

(b) Demonstrați că dacă  $g \in M_f$ , atunci  $g(1)$  este un număr întreg.

Lucian Dragomir

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.