

Barem clasa a XI-a

1. a) $A^2 = O_2$2p

Proprietățile rezultă din relația:

$$(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2 - A^2 = I_2 \dots\dots\dots 2p.$$

- b) Dacă ar exista o matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $X^3 = A$, trecând la determinanți $\Rightarrow (\det X)^3 = \det A = 0$ deci $\det X = 0$. Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din relația $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)I_2 = O_2$ rezultă

$$X^2 = (a+d)X \text{ și } X^3 = (a+d)^2 X = A \text{ și } (a+d)^2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m^2 \\ -1 & -m \end{pmatrix}$$

$$\text{Ar rezulta } \begin{cases} a(a+d)^2 = m \\ d(a+d)^2 = -m \end{cases} \text{ și prin adunare } (a+d)^3 = 0,$$

$$\begin{cases} a+d=0 \\ X^2 = (a+d)X \end{cases} \text{ deci } X^2 = O_2 \text{ și } X^3 = A = O_2 \text{ fals, deoarece } m \in \mathbb{R}^* \dots\dots\dots 3p$$

2. a) Considerăm o matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $a+d = -1$ și $ad-bc = 1$ de exemplu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 3p.$$

- b) $A^2 + A + I_2 = O_2$ Înmulțind relația cu $A - I_2$ va rezulta $A^3 - I_2 = O_2$ deci $A^3 = I_2$ și $\det(A^3) = 1$, adică $\begin{cases} (\det A)^3 = 1 \\ \det A \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \det A = 1 \dots\dots\dots 4p.$

3. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \sum_{k=1}^n (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2)$

Folosind formulele $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ și $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, rezultă

$$\frac{1}{6} \cdot \sum_{k=1}^n (2k^3 + 3k^2 + k) = \frac{1}{6} \cdot \left[2 \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right] =$$

$$\frac{n \cdot (n+1)}{12} \cdot (n^2 + n + 2n + 1 + 1) = \frac{n \cdot (n+1)}{12} \cdot (n^2 + 3n + 2) = \frac{n \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)}{12}.$$

$$x_n = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot 12}{n \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)} = \frac{12}{n \cdot (n+1)}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \dots\dots\dots 2p.$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \frac{12}{k \cdot (k+1)} = 12 \cdot \frac{n}{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 12 \dots\dots\dots 3p.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1} \right)^n = e^{-1} \dots\dots\dots 2p.$$

4. Folosind limitele fundamentale și formulele $a_1 + a_2 + \dots + a_k = \frac{k(a_1 + a_k)}{2}$ și $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ rezultă

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a_1 x) + \sin(a_2 x) + \dots + \sin(a_k x)}{\operatorname{tg}(1 \cdot x) + \operatorname{tg}(3 \cdot x) + \dots + \operatorname{tg}((2k-1) \cdot x)} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)} = \frac{a_1 + a_k}{2k} \dots\dots\dots 4p.$$

Se obține că $\frac{a_1 + a_k}{2k} = \frac{2a_1 - r}{2k} + \frac{r}{2}$ și $b_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2a_1 - r}{2k} + \frac{r}{2} \right) = \frac{2a_1 - r}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \frac{nr}{2}.$
 $\dots\dots\dots 2p.$

Cu criteriul Stolz-Cesaro se obține că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n} = 0.$

Rezultă că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{r}{2} \dots\dots\dots 1p.$

Observație. Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează cu punctajul maxim acordat.