INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928 , FAX: 0235/311715
e-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro
website : http://isj.vs.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ

9 februarie 2013-CLASA a IX-a

1. Să se demonstreze că numerele distincte a, b, c sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă are loc relaţia:

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3(a - b)(b - c).$

2. a) Să se arate că oricare ar fi $a > 0$ are loc inegalitatea:

$$|x - a| + |x + a| \ge 2a, \forall x \in R.$$

b) Să se arate că $\forall n \in N, n \ge 1,$ are loc inegalitatea:

$$|x - n| + |x - n + 1| + \cdots + |x - 1| + |x + 1| + \cdots + |x + n - 1| + |x + n| \ge n(n + 1), \forall x \in R.$$

c) Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care are loc egalitate în inegalitatea de la punctul .

3. Fie $(a_n)_{n\ge1}$ un şir de numere reale astfel încât $a_1 = a_2 = 1$ şi $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{3^n}, n \ge 1$. Să se arate că $a_n < 2$, oricare ar fi $n \ge 1$. (G.M.Nr 11/2012)

4. Fie triunghiul echilateral ABC cu centrul O şi M un punct în interiorul triunghiului. Dacă M_1, M_2, M_3 sunt proiecţiile punctului M pe laturi, să se arate că

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.

BAREM DE NOTARE

1.

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=3\left(a-b\right)\left(b-c\right)\Leftrightarrow a^2+4b^2+c^2-4ab-4bc+2ca=0$$ (2p)

$$4b^2-\left(4ab+4bc\right)+\left(a^2+2ac+c^2\right)=0\Leftrightarrow 4b^2-4b\left(a+c\right)+\left(a+c\right)^2=0$$ (3p)

$$\left[2b-\left(a+c\right)\right]^2=0\Leftrightarrow 2b-\left(a+b\right)=0\Leftrightarrow 2b=a+c$$ (3p)

adică numerele sunt în progresie aritmetică. (2p)

2.a) $|x-a|+|x+a|=|a-x|+|x+a|\geq|a-x+x+a|=2a,$ conform inegalității triunghiulare.

(2p)

b) În inegalitatea de la punctul precedent atribuim lui a toate valorile de la 1 la n și obținem:

$$(*)\ |x-k|+|x+k|\geq 2k,\ \forall k=\overline{1,n}.$$

(1p)

Sumând inegalitățile precedente obținem:

$$|x-n|+|x-n+1|+\cdots+|x-1|+|x+1|+\cdots+|x+n-1|+|x+n|\geq 2(1+2+\cdots+n)=n(n+1),\ \forall x\in R.$$

(1p)

c) Egalitatea are loc dacă și numai dacă are loc egalitate în toate inegalitățile (*), adică

$$|x-k|+|x+k|=2k,\ \forall k=\overline{1,n}$$

(1p)

Dar ecuațiile $|x-k|+|x+k|=2k$ au soluțiile $x\in[-k,k],\ \forall k=\overline{1,n}.$

(1p)

Prin urmare, $x\in\bigcap_{k=1}^{n}[-k,k]=[-1,1]$

(1p)

3.

Fie $P(n): \ a_n < 2, \ (\forall) n \geq 1$

$P(1): \ a_1 = 1 < 2$, $P(2): \ a_2 = 1 < 2$

(1p)

Presupun $P(m)$ adevărată pentru orice $m \leq k+1 \ \Leftrightarrow a_m < 2, (\forall) m \leq k+1$, $k \geq 1$

(1p)

$$\left.\begin{aligned} & a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{a_k}{3^k} \\ & a_{k+1} - a_k = \frac{a_{k-1}}{3^{k-1}} \\ & \ldots \\ & a_3 - a_2 = \frac{a_1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{k+2} - a_2 = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_k}{3^k}$$

(2p)

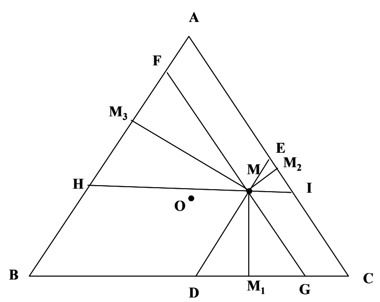
$$a_{k+2} - 1 < \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^k} \Leftrightarrow$$

(2p)

$$\Leftrightarrow a_{k+2} < 2 - \frac{1}{3^k} < 2$$

Conform Principiului Inducției Matematice $a_n < 2$, oricare ar fi $n \geq 1$.

(1p)



4.Fie $MM_1 \perp BC, M_1 \in BC$, $MM_2 \perp AC, M_2 \in AC$, $MM_3 \perp BA, M_3 \in BA$

$FG \| AC, HI \| BC, DE \| AB, \ FG \cap HI \cap DE = \{M\}$,

$F, H \in AB, \ D, G \in BC, \ E, I \in AC$ (2p)

Triunghiurile MDG, MEI, MFH sunt echilaterale iar MM_1, MM_2, MM_3 sunt mediane. (1p)

$\overrightarrow{MM}_1 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MG}\right)$, $\overrightarrow{MM}_2 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MI}\right)$,

$\overrightarrow{MM}_3 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MF}\right)$ (1p)

$$\overrightarrow{MM}_1 + \overrightarrow{MM}_2 + \overrightarrow{MM}_3 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\right) =$$

(1p)

(triunghiul ABC este echilateral$\Rightarrow$O este centrul de greutate al triunghiului $\Rightarrow$conform relației lui Leibniz) $= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

(2p)