



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 25 FEBRUARIE 2023

BAREM clasa a VIII-a

Problemă 1.

a) Aflați numerele raționale a, b astfel încât $a(\sqrt{2}+1) - b(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$.b) Pentru $a, b, c \in \mathbb{Q}$, astfel încât $ab + bc + ca = 2023$, să se arate că

$$\sqrt{(2023+a^2)(2023+b^2)(2023+c^2)} \in \mathbb{Q}$$

Soluție:

a) $a(\sqrt{2}+1) - b(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$ se mai scrie $(a-b-1)\sqrt{2} + (a+b) = 0$ 1pCum $\sqrt{2}$ -număr irațional 1p

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2} \quad \dots \quad 1p$$

$$2023 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = a(b+a) + c(b+a) = (b+a)(a+c)$$

b) $2023 + b^2 = ab + bc + ca + b^2 = b(b+a) + c(b+a) = (b+a)(b+c)$ 2p

$$2023 + c^2 = ab + bc + ca + c^2 = c(c+a) + b(c+a) = (b+c)(a+c)$$

$$\text{Avem } \sqrt{(2023+a^2)(2023+b^2)(2023+c^2)} = \sqrt{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2} \quad \dots \quad 1p$$

$$\sqrt{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2} = (a+b)(a+c)(b+c) \in \mathbb{Q} \quad \dots \quad 1p$$

Problema 2.

Determinați intervalul $(a, b) \subset \mathbb{R}$ știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$

b) $|b-a-1| = a^2 + b^2 - 3b + \frac{9}{4}$.

Soluție:

$$\text{Din } (a, b) \cap \mathbb{Z} = \emptyset, \text{ rezultă că } |b-a| \leq 1 \quad \dots \quad 3p$$

$$|b-a-1| = 1-b+a \quad \dots \quad 1p$$

$$\text{a doua relație devine } 1-b+a = a^2 + b^2 - 3b + \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + (b-1)^2 = 0 \quad \dots \quad 2p$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad \dots \quad 1p$$

Problema 3.

Pe planul triunghiului ABC cu $\angle A = 90^\circ$, $BC = 12\text{cm}$ și $\angle B = 60^\circ$, se construiește perpendiculara VA , cu $VA = 3\text{cm}$. Determinați:

a) $d(V, BC)$

b) lungimea segmentului BN , $N \in VB$ astfel încât aria triunghiului CAN să fie minimă.

Soluție:

a) $VA \perp (ABC), AE \perp BC, AE, BC \subset (ABC) \xrightarrow{T3 \perp} VE \perp BC \Rightarrow d(V, BC) = VE \dots\dots\dots 1p$

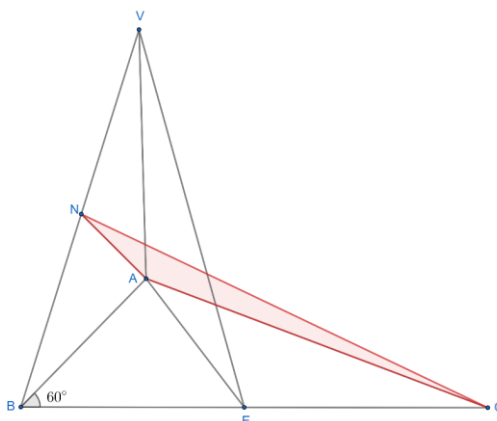
$\xrightarrow[t \angle 30^\circ]{\Delta ABC} AB = 6\text{cm}, \sin 60^\circ = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AE = 3\sqrt{3}\text{cm} \dots\dots\dots 1p$

$\xrightarrow[t.Pitagora]{\Delta VAE} VE = 6\text{cm} \dots\dots\dots 1p$

b) $CA \perp (VAB), AN \subset (VAB) \Rightarrow CA \perp AN. A_{\Delta CAN} = \frac{AC \cdot AN}{2} \dots\dots\dots 1p$

Aria este minimă dacă și numai dacă AN are lungime minimă, adică $AN \perp VB$. $\dots\dots\dots 1p$

$\xrightarrow[t.Pitagora]{\Delta VAB} VB = 3\sqrt{5}\text{cm} \xrightarrow[t \angle 30^\circ]{\Delta ABC} AB = 6\text{cm}, \xrightarrow[t.catetei]{\Delta VAB} BN = \frac{12\sqrt{5}}{5}\text{cm} \dots\dots\dots 2p$



Problemă 4.

Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic. Prin punctul C se duce un plan α paralel cu planul $(A' BD)$, care intersectează pe $C' D$ și $C' B$ în punctele M , respectiv N .

a) Aflați raportul dintre aria triunghiului CMN și aria triunghiului $A' BD$.

b) Arătați că punctele C, E, A' sunt coliniare, unde $\{E\} = BM \cap DN$.

Soluție:

$$a) (CB'D') \cap (DCC') = D'C, (CB'D') \cap (BCC') = B'C, (CB'D') \cap (A'B'C') = B'D'$$

$$BD \parallel B'D', B'C' \parallel A'D, \begin{cases} A'D \cap BD = \{D\}, A'D, BD \subset (A'DB) \\ B'D' \cap B'C' = \{B'\}, B'D', B'C' \subset (D'B'C') \end{cases} \Rightarrow (A'DB) \parallel (D'B'C') \dots\dots\dots 1p$$

$$(D'B'C') \cap (DCC') = D'C \Rightarrow DC \cap D'C = \{M\}$$

$$(D'B'C') \cap (BCC') = B'C \Rightarrow B'C \cap BC' = \{N\}$$

$$\text{În } \triangle D'CB', MN\text{-linie mijlocie} \Rightarrow MN \parallel B'D' \xrightarrow{t.f.a} \triangle CMN \sim \triangle CD'B' \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \frac{A_{\triangle CMN}}{A_{\triangle CD'B'}} = \left(\frac{MN}{B'D'} \right)^2 = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 1p$$

$$\xrightarrow{L.L.L} \triangle A'DB \equiv \triangle CB'D' \Rightarrow \frac{A_{\triangle CMN}}{A_{\triangle A'BD}} = \frac{1}{4}$$

$$b) \text{În } \triangle DC'B, M - \text{mijlocul segmentului } DC', N - \text{mijlocul segmentului } C'B \Rightarrow BM, DN \text{ mediane.}$$

$$\text{Cum } BM \cap DN = \{E\}, E - \text{centru de greutate în } \triangle DC'B. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Fie } BD \cap AC = \{O\}, ABCD - \text{dreptunghi} \Rightarrow \{O\} - \text{mijlocul segmentului } BD \Rightarrow C'O - \text{mediană și } E \in C'O$$

$$\text{astfel încât } \frac{OE}{EC'} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{În } A'ACC' - \text{dreptunghi (justificare), considerăm } A'C \cap OC' = \{E'\}.$$

$$\text{Cum } OC \parallel A'C' \xrightarrow{t.f.a} \triangle OE'C \sim \triangle C'E'A' \Rightarrow \frac{OC}{A'C'} = \frac{OE'}{E'C'} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Știind că } \frac{OE}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow E = E' \Rightarrow C, E, A' - \text{coliniare.} \dots\dots\dots 1p$$

