INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN PRAHOVA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 23.02.2014 –
CLASA A V-A
Subiecte

1. **a**. Aflaţi numărul natural nenul n ştiind că sfertul sfertului cubului său este egal cu jumătatea jumătăţii pătratului său.

Prof . Tomescu Ion, prof. Lupea Ion

b. Determinaţi numărul natural de patru cifre , în baza 10, ştiind că punându-i la stânga cifra 4 se obţine un număr de trei ori mai mare decât dacă îi punem la dreapta cifra 3.

Gazeta Matematică 2012

2. Un număr natural este ,,prieten'' cu 2014 dacă restul şi câtul împărţirii lui 2014 la acesta sunt egale. Câţi ,,prieteni'' are 2014?

Prof Gheorghe Crăciun, Ploieşti

3. Comparaţi numerele $a=5^{14}+5^{214}+5^{2014}$, $b=3^{21}+3^{321}+3^{3021}$ şi $c=2^{35}+2^{535}+2^{5035}$.

Prof .Gheorghe Achim, Mizil

4. Demonstraţi că numărul $24^n, n\in\mathbb{N}^*$, poate fi scris ca sumă de trei pătrate perfecte.

Prof. Maria şi Anton Negrilă, Ploieşti

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.02.2014 –

CLASA A VI-A

Subiecte

1. O telecabină pleacă de la Bușteni la ora 11:59 spre o cabană, parcurgând 2m în fiecare secundă. Sus se opreste 3 minute și apoi coboară făcând 6m în fiecare secundă. Dacă a ajuns înapoi la ora 14:02, câti km sunt de la Busteni la cabană?

Prof. Gabriel Ţaga, Ploiesti

2. Pentru fiecare număr natural k considerăm numerele :

$$a=2k+1,\ b=3k+2,\ c=4k+3,\ d=5k+4.$$

Arătați că $\frac{[c,d]}{c}-\frac{[a,b]}{b}-\frac{[a,b]}{a}=1$ (notația $[a,b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b).

Prof. Ioana și Gheorghe Crăciun , Ploiesti

3. Fie numărul :

$$x=\left(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots.+\frac{1}{1+2+..+2013}\right)^n.\frac{2014^n}{2^n},\ n\in\mathbb{N}.$$

a) Arătați că $x\in\mathbb{N}$;

b) Determinați numărul natural n, știind că numărul natural x are 125 divizori naturali.

Prof. Anda Marcu, Ploiesti

4. Un unghi alungit se împarte în n unghiuri $u_1,u_2,...,u_n$, fiecare având cu un grad mai mult decât precedentul. Știind că bisectoarele unghiurilor u_7 și u_{14} formează un unghi cu măsura de $101^\circ30'$, aflați măsurile unghiurilor u_1 și u_n.

Prof. Ion Bilciurescu, Boldești-Scăeni

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN PRAHOVA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.02.2014 –

CLASA A VII-A

Subiecte

1. Rezolvați ecuația:

$$\frac{x-1}{2013}+\frac{x-4}{2010}+\frac{x-7}{2007}=\frac{x-2007}{7}+\frac{x-2004}{10}+\frac{x-2001}{13}$$

Prof. Petre și Cătălin Năchilă

2. Fie numerele reale a,b,c astfel încât $a\geq 16,\ b\geq 25,\ c\geq 36$. Demonstrați că:

$$4\sqrt{a-16}+5\sqrt{b-25}+6\sqrt{c-36}\leq\frac{a+b+c}{2}$$

Prof. Maria și Anton Negrilă

3. Pe diagonala AC a pătratului ABCD se ia punctul E astfel încât $\frac{EA}{EC}=\frac{1}{2}$. Dacă $AE=\frac{10\sqrt{2}}{3}$ cm, determinați aria și perimetrul pătratului ABCD, precum și aria triunghiului ABE.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

4. În triunghiul echilateral ABC punctele D și M sunt situate pe laturile (BC) și respectiv (AC) astfel ca m($\angle$ BAD) = m($\angle$ MDC). Arătați că $AD^2 = AB \cdot AM$.

Prof. Gheorghe Bumbăcea , Bușteni

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 23.02.2014 –
CLASA A VIII-A
Subiecte

1. **a**. Arătaţi că $2\sqrt{a+b} \geq \sqrt{2a}+\sqrt{2b}$, pentru orice două numere reale strict pozitive a,b.

b. Arătaţi că dacă x, y sunt numere reale strict pozitive astfel încât $x \cdot y = 16$, atunci $\sqrt{2x+32y}+\sqrt{2y+32x} \geq 20.$

Prof Maria şi Anton Negrilă, Ploieşti

2. Ştiind că $a,b,c \in (0;\infty)$ şi $b^2+bc-ac=c^2$, respectiv $a+b=2c$, calculaţi $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

Prof. Gheorghe Achim , Mizil

3. În tetraedrul ABCD cu $AC = AD$, punctele M şi N sunt picioarele bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle BAC$ şi $\sphericalangle BAD$ în triunghiurile BAC , respectiv BAD. Demonstraţi că $MN \| CD$.

****

4. În vârfurile pătratului ABCD de latură a, se ridică perpendiculare pe planul (ABC) pe care se fixează, de aceeaşi parte a planului, punctele A', B', respectiv C' astfel încât $AA' = BB' = CC'$. Punctele R şi Q sunt mijloacele segmentelor $[AA']$ şi $[BB']$ iar unghiul dintre dreptele A'Q şi RD este de 60°.

a. Calculaţi distanţa de la R la BD.

b. Arătaţi că distanțele de la C' la planele (BRD) şi (BCR) sunt direct proporţionale cu $\sqrt{3}$ şi $\sqrt{2}$.

Prof. Bilciurescu Ion , Boldeşti Scăeni

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 23.02.2014 –
CLASA A X-A
Subiecte

1.Arătaţi că dacă $x, y, z \in (1;\infty)$ sau $x, y, z \in (0;1)$, atunci $\frac{\log_x z}{x+z} + \frac{\log_y x}{y+x} + \frac{\log_z y}{z+y} \geq \frac{9}{2(x+y+z)}$

***

2. Determinaţi numerele reale strict pozitive x, y pentru care au loc egalităţile :

$2\left(x \cdot 2^x - y\right) = x - y \cdot 2^y + 3$ şi $x^2 \cdot 4^x - x \cdot y \cdot 2^{x+1} + y \cdot 2^y = x - y^2 + 2$.

Prof. Gabriel Necula, Breaza

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} 2^{[x]} + 2^{\{y\}} = 4^z \\ 2^{[y]} + 2^{\{z\}} = 4^x \\ 2^{[z]} + 2^{\{x\}} = 4^y \end{cases}$$

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

4 . În planul complex se consideră punctele necoliniare $A(a), B(b), C(c)$.Ştiind că $a + b + c = 0, |a| \leq |b| \leq |c|$ şi $|c - b| \leq |a - b|$, rezolvaţi ecuaţia $|b + c|^x + |b - c|^x = (|b| + |c|)^x$.

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN PRAHOVA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 23.02.2014 –
CLASA A IX-A
Subiecte

1. Determinaţi numerele a,b reale distincte care verifică sistemul

$$\begin{cases} [a]+[b]=\dfrac{2a+2b}{3} \\ [a]\cdot b+[b]\cdot a=a\cdot b+\dfrac{3}{4}[a]\cdot[b] \end{cases}$$

Prof. Claudiu Militaru , Ploiești

2. Determinaţi $x,y\in\mathbb{R}$ ştiind că $x\sqrt{a^2-x^2}-y\sqrt{a^2-y^2}=a^2$, unde a este număr real pozitiv .

Prof Petre şi Cătălin Năchilă, Ploieşti

3. Se consideră hexagonul convex oarecare *FLORIN* şi G_1, G_2, G_3 ,..., G_{10} centrele de greutate ale triunghiurilor *FLO*, *LOR*, *ORI*, *RIN*, *INF*, *NFL*, $G_1G_3G_5$, $G_2G_4G_6$, *FOI* respectiv *LRN*. Demonstraţi că:

a. dacă punctele G_9 , G_7 , G_8 , G_{10} sunt distincte, atunci ele sunt coliniare şi echidistante;

b. dacă două dintre punctele G_7 , G_8 , G_9 , G_{10} coincid, atunci cele patru puncte coincid.

Prof. Claudiu Militaru , Ploiești

4. Fie paralelogramul $ABCD$ de centru O şi $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ şi punctele $X\in(AB), Y\in(BC), Z\in(CD), T\in(DA)$ astfel încât rapoartele $\dfrac{(n+1)AX}{AB}, \dfrac{(n+2)BY}{BC}, \dfrac{(n+3)CZ}{CD}$, respectiv $\dfrac{(n+4)DT}{DA}$ sunt numere naturale.

Arătaţi că vectorul $\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{OZ}+\overrightarrow{OT}$ nu poate fi nul.

Prof Emil Vasile , Ploieşti

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN PRAHOVA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.02.2014 –

CLASA A XI-A

Subiecte

1. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+x^2-2}-\sqrt{9x^2-3x+1}-ax+b\right)=-\frac{5}{12}.$$

***

2. Fie matricele $A,X\in M_3(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea : $(A-X)(A+X)=A \quad (*)$.

a) Pentru $A=I_3$ arătați că există o infinitate de matrice X care verifică egalitatea $(*)$.

b) Arătați că $XA=AX$.

c) Pentru $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ deterninați matricele X care verifică egalitatea $(*)$.

Prof. Gabriel Necula, Breaza

3. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq0}$, $x_n=\frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{2}-\alpha$, $\forall n\geq1$, $x_0=1$, $x_1=\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$.

a) Demonstrați că $(x_n)_{n\geq0}$ are limită ;

b) Determinați α și β pentru care $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{x_n+n-1}\right)=1$.

Prof. Claudiu Militaru, Ploiești

4. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&-1\end{pmatrix}$, $a,\ b\in\mathbb{R}^*,\ a>1$.

Demonstrați că mulţimea $M=\{A^n, n\in\mathbb{N}^*\}$ are o infinitate de elemente.

Prof. Şcheau Constantin, Ploieşti

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN PRAHOVA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.02.2014 –

CLASA A XII-A

Subiecte

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o functie derivabilă cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$ care verifică simultan relațiile:

i) $f'(x)-2f(x)=2x+1$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$; ii) $f(0)=1$

a) Calculați primitivele funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{2x+1}{e^{2x}}$.

b) Determinați funcția f.

Prof. Vasile Coman, Vălenii de Munte

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $f(x)\cdot f(-x)=1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Calculați $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(1+2\sin^2 x)(1+f(x))}$

Gazeta Matematică

3. Rezolvați în $\mathbb{Z}_5$ sistemul $\begin{cases} x+y+\hat{2}z=\hat{1} \\ x+\hat{2}y+\hat{3}z=\hat{4} \end{cases}$

***

4. Fie $G=\left\{f \mid f:[0,1]\to[0,1]\, bijectivă\right\}$

a) Demonstrați că $(G,\circ)$ este grup (unde "$\circ$" este operația de compunere a funcțiilor)

b) Arătați că funcția $f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1)\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\} \\ \frac{1}{2}, & x=0 \\ 1, & x=\frac{1}{2} \\ 0, & x=1 \end{cases}$ aparține mulțimii G și are ordinul 3.

c) Determinați $g\in G$ continuă de ordin 2 si demonstrați că orice funcție $h\in G$, h continuă, nu poate avea ordinul 3.

Prof.Emil Vasile, Ploiești

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.