

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16.02.2019
BAREM DE CORECTARE
CLASA A XI-A

SUBIECTUL I:

Considerăm şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_1 > 0$ si $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt[4]{1 + \frac{a_n^8}{n}}}$.

Să se demonstreze că şirul este convergent şi să se calculeze $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

G.M. Nr 2/2018

Soluție:

Evident $a_n > 0, (\forall)n \geq 1 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ mărginit inferior1p

Din $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt[4]{1 + \frac{a_n^8}{n}}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{a_n^8}{n}}} < 1, (\forall)n \geq 1 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ descrescător2p

Deoarece $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător şi mărginit inferior $\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ este convergent1p

Avem $\sqrt[4]{1 + \frac{a_n^8}{n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow 1 + \frac{a_n^8}{n} = \frac{a_n^4}{a_{n+1}^4}$.

$\Rightarrow \frac{a_n^8}{n} = \frac{a_n^4}{a_{n+1}^4} - 1 \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{a_n^4 \cdot a_{n+1}^4} - \frac{1}{a_n^8} < \frac{1}{a_{n+1}^8} - \frac{1}{a_n^8}$ 1p

Prin însumare obținem:

$\frac{1}{a_{n+1}^8} - \frac{1}{a_n^8} > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, (\forall)n \geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}^8} > \frac{1}{a_n^8} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, (\forall)n \geq 1$

$\Rightarrow 0 < a_{n+1}^8 < \frac{1}{\frac{1}{a_n^8} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$ 1p

Deoarece $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 1p

SUBIECTUL II

Se consideră matricele $A, B \in M_n(R), n \in N^*, n \geq 2$.

a) Demonstrați că $\det(A^2 + A + I_n) \geq 0$

b) Arătați că pentru $A \cdot B = O_n$ este îndeplinită relația: $\det(A^2 + B^2 + A + B + I_n) \geq 0$

Soluție:

a) Deoarece $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, atunci avem

$A^2 + A + I_n = (A - \varepsilon I_n)(A - \bar{\varepsilon} I_n) \Rightarrow \det(A^2 + A + I_n) = \det(A - \varepsilon I_n) \det(A - \bar{\varepsilon} I_n)$, unde

$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ 2p

şi deducem

$\det(A^2 + A + I_n) = \det(A + \varepsilon I_n) \det(A - \bar{\varepsilon} I_n) = \det(A - \varepsilon I_n) \overline{\det(A - \varepsilon I_n)} = |\det(A - \varepsilon I_n)|^2 \geq 0$

Deci $\det(A^2 + A + I_n) \geq 0$ 2p

b) Observăm că $A^2 + B^2 + A + B + I_n = (A^2 + A + I_n)(B^2 + B + I_n)$ 2p

Adică aplicând punctul a) obținem $\det(A^2 + B^2 + A + B + I_n) \geq 0$ 1p

SUBIECTUL III

Se consideră şirul de termen general $a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \dots \cdot \cos^n nx}{x^2}, n \in N^*$

a) Calculaţi a_1 şi a_2 .

b) Calculaţi $a_n, n \in N^*$

c) Calculaţi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{a_k} \right)^{\ln n}$.

Soluţie:

$$a) \quad a_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot (1 + \cos^2 2x - 1)}{x^2} = a_1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \quad a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos^2 x \cdot \dots \cdot \cos^{n-1}(n-1)x \cdot (1 + \cos^n nx - 1)}{x^2}$$

$$a_n = a_{n-1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos nx) \cdot (1 + \cos nx + \cos^2 nx \dots + \cos^{n-1} nx)}{x^2} = a_{n-1} + n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{nx}{2}}{x^2} =$$

$$= a_{n-1} + n \cdot 2 \cdot \frac{n^2}{4} = a_{n-1} + \frac{n^3}{2}$$

Din $a_n = a_{n-1} + \frac{n^3}{2}$, rezulta ca $a_n = \frac{n^2(n+1)^2}{8}$, oricare $n \in N^*$2p

$$c) \quad \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \frac{(2k+1)}{a_k} = \sum_{k=1}^n \frac{(2k+1)}{k^2 \cdot (k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \frac{(2k+1)}{a_k} \right)^{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right)^{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-1}{(n+1)^2} \right)^{\ln n} = e^{-\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{(n+1)^2}} =$$

$$e^0 = 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Am folosit: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{2n+1} = 0$$

SUBIECTUL IV:

Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(R)$.

a) Determinaţi $A^n, n \in N^*$

b) Arătaţi că există matricele $B, C \in M_2(Z)$ astfel încât $A = B^3 + C^3$

REZOLVARE:

$$a) \quad \text{Calculăm } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

și deducem $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^n & 2^n \end{pmatrix}$ 1p

rezultat care se verifică prin inducție matematică2p.

- b) Folosind relația Hamilton-Cayley avem: $A^2 - 3A + 2I_2 = O_2$ și $A^3 - 3A^2 + 2A = O_2$ 1p,
 adică $(A - I_2)^3 = A - I_2$ 1p

Deci, $A = (A - I_2)^3 + I_2$. Alegem $B = A - I_2$ și $C = I_2$ și obținem că există matricele
 $B, C \in M_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $A = B^3 + C^3$ 1p