

BAREM – CLASA A VIII-A

SUBIECTUL I

- a) Arătați că $(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) = x^5 + x^4 + 1$, pentru oricare număr real x .
- b) Să se arate că numărul $A = 2014^{15} + 2014^{12} + 1$ nu este număr prim.

Barem. a) 2 p

b) $A = (2014^3)^5 + (2014^3)^{12} + 1$ 2 p

$A = (2014^6 + 2014^3 + 1)(2014^9 - 2014 + 1)$ 2 p

Finalizare: A este număr compus, deci nu este prim 1 p

SUBIECTUL II

Arătați că, dacă $a < 2$ și $b > 2$ sunt numere reale, atunci $\frac{a^2 + 5}{a - 2} - \frac{b^2 + 5}{b - 2} \leq -12$.

Barem. Notăm $a - 2 = x < 0$ și $b - 2 = y > 0$ 1 p

Inegalitatea devine $x^2y - xy^2 + 9y - 9x + 12xy \geq 0$ 2 p

Obținem $y(x + 3)^2 - x(y - 3)^2 \geq 0$ 3 p

Finalizare: 1 p

SUBIECTUL III

Fie O și O' centrele fețelor $ABCD$, respectiv $BCC'B'$ ale cubului $ABCD A'B'C'D'$, $AB = a$.

- a) Aflați măsura unghiului dreptelor $D'O$ și $A'O'$.
- b) Calculați distanța de la punctul O' la planul $(D'AC)$.

Barem. a) Fie O'' centrul lui $A'B'C'D$. Deducem $O''B \parallel D'O$. 0,5 p

Fie M mijlocul lui $O'C'$. Deducem $O''M \parallel A'O'$. 0,5 p

Măsura unghiului dreptelor $D'O$ și $A'O'$ este $m(\angle BO''M)$. 0,5 p

Triunghiul $A'BC'$ echilateral $\Rightarrow A'O' \perp BC'$ 0,5 p

$\Rightarrow O''M \parallel A'O'$ și $O''M \perp BC'$ 1 p

$\Rightarrow m(\angle BO''M) = 60^\circ$ 1 p

b) Dacă $pr_{(D'AC)}B' = E$, $pr_{(D'AC)}O' = F \Rightarrow O'F = \frac{1}{2}B'E$ 1 p

Află $B'E = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$ 1,5 p

Finalizare: $O'F = d(O'; (D'AC)) = \frac{\sqrt{3}a}{3}$. 0,5 p

SUBIECTUL IV

Fie rombul $ABCD$, cu $AB = a$ și $m(\angle A) = 60^\circ$. De aceeași parte a planului (ABC) se ridică perpendicularele AF și CE astfel încât $AF = CE = c$. Fie $\alpha = m(\angle(AC; BE))$ și $\beta = m(\angle((BFE); (ABC)))$.

a) Calculați $\cos \alpha$ și $\cos \beta$.

b) Arătați că, pentru oricare $c > 0$, avem $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Barem. a) Fie $d \parallel AC$, deci $\alpha = m(\angle(BM; BE))$. 1 p

$$BE = \sqrt{a^2 + c^2} \quad 0,5 \text{ p}$$

Cu $CM \perp d$ și $T_3 \perp$, avem $EM \perp d$, deci $\beta = m(\angle(EM; CM)) = m(\angle CME)$. 1 p

$$ME = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4c^2}, \quad BM = \frac{\sqrt{3}a}{2}, \quad CM = \frac{a}{2}. \quad 1,5 \text{ p}$$

$$\cos \alpha = \frac{BM}{BE} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + c^2}}. \quad 0,5 \text{ p}$$

$$\cos \beta = \frac{CM}{ME} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4c^2}} \quad 0,5 \text{ p}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{ME}{BM} = \frac{\sqrt{a^2 + 4c^2}}{a\sqrt{3}}. \quad 1 \text{ p}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4c^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 4c^2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad 1 \text{ p}$$