

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 14 februarie 2025

Clasa a X-a

1. Aflați numărul natural $n \geq 2$ și numerele reale pozitive $x_1, x_2, \dots, x_n$ știind că $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3\sqrt[3]{x_1 x_2 \cdots x_n} - 1$ și $n = \sqrt[n]{n+7} - 1$.

Gazeta Matematică, Supliment cu exerciții

2. Fie un număr natural $n > 1$ și numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n > 1$. Notăm $S = \sum_{k=1}^n a_k$.

Arătați că

$$\log_{a_1} \left(\frac{S - a_1}{n - 1} \right) + \log_{a_2} \left(\frac{S - a_2}{n - 1} \right) + \dots + \log_{a_n} \left(\frac{S - a_n}{n - 1} \right) \geq n$$

Diana Meleşteu

3. Fie $a, b, c \in C^*$, cu proprietatea că $|a| = |b| = |c| = a + b + c$. Demonstrați că printre numerele a, b, c există două numere cu suma zero.

Romeo Ilie

4. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție cu proprietatea că $f(f(x)) = x\sqrt{x}$, $\forall x \geq 0$. Demonstrați că $f(\sqrt[3]{x^2}) = \sqrt[3]{f^2(x)}$, $\forall x \geq 0$.

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.