Olimpiada de matematică
Etapa locală 16.02. 2013
Subiect clasa a VIII- a

Problema 1:

a) Dacă x este un număr real, arătați că $x^2+8-4\sqrt{2}|x|\geq 0$.

b) Determinați numerele reale a şi b care verifică relaţia $a^2+b^2+24\leq 8|a|+4\sqrt{2}|b|$.

Problema 2:

Se consideră muțimea de numere reale $M=\{a_1,a_2,a_3,...,a_{10}\}$, unde

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_2=a_1\left(1-\sqrt{a_1}\right), a_3=a_2\left(1-\sqrt{a_2}\right)\ ,\ ...\ ,\ a_{10}=a_9\left(1-\sqrt{a_9}\right).$$

Demonsrați că:

a) $a_2=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$;

b) dacă $x\in M$, atunci $0<x<1$;

c) $a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_9^2<\dfrac{1}{2}$.

Problema 3:

Fie un triunghi dreptunghic isoscel a cărui ipotenuză este conţinută într-un plan α ce formează cu planul triunghiului un unghi cu măsura de 45°. Determinaţi măsura unghiurilor formate de catetele triunghiului cu planul α.

Problema 4:

Se consideră 9 puncte situate în interiorul sau pe suprafața unui cub cu latura de lungime 2 dm. Arătați că, pentru orice alegere a acestor puncte, există două situate la o distanță mai mică sau egală cu $\sqrt{3}$ dm.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.