

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 9 februarie 2024

Soluţii

Clasa a XII-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi mulţimea $G = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{4} \right\}$. Definim pe $\mathbb{R}$ operaţia " $\star$ " prin

$$x \star y = a(x^2 + y^2) + 4xy + (b^2 - 6)x + by + \frac{1-b}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- (a) Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât restricţia operaţiei " $\star$ " la mulţimea G să determine pe G o structură de grup abelian.
- (b) Calculaţi $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $x \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$, în ipoteza că $(G, \star)$ este grup abelian.

Ioana Maşca

Soluţie.

- (a) Condiţia $x \star y = y \star x$, $\forall x, y \in G$ este echivalentă cu $b^2 - 6 = b$, de unde obţinem $b \in \{-2, 3\}$ **1 punct**
Pentru $e \in G$, condiţia $x \star e = x$, $\forall x \in G$ implică $a = 0$ **1 punct**

- i. Pentru $a = 0$ şi $b = -2$, avem:

$x \star y = 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2}$, $x \star y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, $\forall x, y \in G = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.
Deoarece $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) \neq 0$, $\forall x, y \neq \frac{1}{2}$, mulţimea $G = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu " $\star$ ". Se verifică elementar că operaţia " $\star$ " este asociativă, admite elementul neutru $e = \frac{3}{4} \in G$ şi orice element $x \in G$ este simetrizabil, cu simetricul $x' = \frac{1}{2} + \frac{1}{16\left(x - \frac{1}{2}\right)} \in G$ **2 puncte**

- ii. Pentru $a = 0$ şi $b = 3$, avem:

$x \star y = 4xy + 3x + 3y - 1 = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(y + \frac{3}{4}\right) - \frac{13}{4}$, $\forall x, y \in G = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{4} \right\}$.
Operaţia astfel definită nu este asociativă. **1 punct**

- (b) $(G, \star)$ este grup abelian pentru $a = 0$ şi $b = -2$. Se demonstrează prin inducţie după $n \in \mathbb{N}^*$ relaţia $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 4^{n-1}\left(x - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$, $\forall x \in G$ **2 puncte**

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, $\text{card}(G) = n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- (a) $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

- (b) $x^{n-1} \cdot y^{n-1} = (x \cdot y)^{n-1}, \forall x, y \in G.$
 (c) $x^{n-2} \cdot y^{n-2} = (y \cdot x)^{n-2}, \forall x, y \in G.$

Ovidiu Pop

Soluție. Evident, (a) $\Rightarrow$ (b) și (a) $\Rightarrow$ (c) **1 punct**

Au loc relațiile:

$\text{card}(G) = n \Rightarrow a^n = e, \forall a \in G \Rightarrow a^{n-1} = a^{-1}, \forall a \in G$ **1 punct**

$a^{n-2} = a^{-2}, \forall a \in G$, unde $a^{-2} = (a^{-1})^2$ **1 punct**

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \forall a, b \in G$ **1 punct**

(b) $\Rightarrow$ (a).

Fie $x, y \in G$. Avem

$$\begin{aligned} xy &= (x^{-1})^{-1} (y^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{n-1} (y^{-1})^{n-1} \stackrel{(b)}{=} (x^{-1}y^{-1})^{n-1} = \\ &= (x^{-1}y^{-1})^{-1} = (y^{-1})^{-1} (x^{-1})^{-1} = yx. \end{aligned}$$

..... **2 puncte**

(c) $\Rightarrow$ (a).

Fie $x, y \in G$. Avem

$$\begin{aligned} x^{-1}x^{-1}y^{-1}y^{-1} &= x^{-2}y^{-2} = x^{n-2}y^{n-2} \stackrel{(c)}{=} (yx)^{n-2} = (yx)^{-2} = \\ &= ((yx)^{-1})^2 = (x^{-1}y^{-1})^2 = x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}. \end{aligned}$$

Din relația de mai sus, obținem (după simplificări): $x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, de unde, prin inversare, deducem $yx = xy$ **1 punct**

3. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui f cu proprietatea că $F(x) + x \cdot f(x) \cdot \ln x \geq 0, \forall x > 0$. Demonstrați că orice primitivă a funcției F este monotonă.

Romeo Ilie

Soluție.

Definim funcția $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = F(x) \ln x, \forall x > 0$.

$$g'(x) = (F(x) \ln x)' = f(x) \ln x + \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) + x f(x) \ln x}{x} \geq 0, \forall x > 0.$$

Rezultă că funcția g este monoton crescătoare pe $(0, \infty)$ **2 puncte**

$g(1) = 0$ **1 punct**

$x \in (0, 1) \Rightarrow g(x) \leq 0 \Rightarrow F(x) \ln x \leq 0 \Rightarrow F(x) \geq 0$ **1 punct**

$x \in (1, \infty) \Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow F(x) \ln x \geq 0 \Rightarrow F(x) \geq 0$ **1 punct**

Prin continuitate, rezultă $F(1) \geq 0$. Astfel, $F(x) \geq 0, \forall x > 0$ **1 punct**

Atunci, orice primitivă a funcției F este monoton crescătoare. **1 punct**

4. Calculați $\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1 + e^{2x-1}} dx$.

Gazeta Matematică

Soluție.

Notăm $I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1 + e^{2x-1}} dx$.

Cu schimbarea de variabilă $y = 1 - x$, obținem:

$$I = \int_1^0 \frac{\sin(\pi - \pi y)}{1 + e^{1-2y}} (1 - y)' dy = \int_0^1 \frac{e^{2y-1} \sin(\pi y)}{e^{2y-1} + 1} dy.$$

..... **3 puncte**

Rezultă:

$$2I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1 + e^{2x-1}} dx + \int_0^1 \frac{e^{2x-1} \sin(\pi x)}{e^{2x-1} + 1} dx = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

..... **3 puncte**

Atunci $I = \frac{1}{\pi}$ **1 punct**