

Barem de corectare OLM 2015 Clasa a XII-a

1. a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Big|_0^1 = \ln(\sqrt{2}+1) \dots\dots\dots(2p)$

b) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \Rightarrow \int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = 0 \dots\dots\dots(1p)$

T. de medie $\Rightarrow \exists c \in [0, 1]$ astfel încât $f(c) - \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} = 0 \dots\dots\dots(2p)$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq f(c) \leq 1 \dots\dots\dots(2p)$

(SAU

T. de medie pentru $\int_0^1 f(x)dx = \ln(\sqrt{2}+1) \Rightarrow \exists c \in [0, 1]$ astfel încât $f(c) = \ln(\sqrt{2}+1) \dots\dots\dots(1p)$

Avem $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq f(c) \leq 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq \sqrt{2}+1 \leq e \dots\dots\dots(1p)$

A doua inegalitate este evidentă $\dots\dots\dots(1p)$

Prima inegalitate:

$$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} < e^{\frac{1}{1.4}} = e^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{e^5} < \sqrt[7]{2,8^5} = \sqrt[7]{\left(\frac{14}{5}\right)^5} = \sqrt[7]{\frac{196 \cdot 196 \cdot 14}{5^5}} < \sqrt[7]{\frac{200 \cdot 200 \cdot 14}{5^5}} =$$

$$= \sqrt[7]{\frac{8 \cdot 8 \cdot 14}{5}} = 2\sqrt[7]{\frac{7}{5}} = 2\sqrt[7]{1,4} < 2\sqrt[7]{1,4} < 2\sqrt[7]{1,44} = 2 \cdot 1,2 = 2,4 < \sqrt{2}+1 \dots\dots\dots(2p)$$

2. Fie $x, y \in G$. Trebuie arătat că $xy = yx$.

Dacă $x \in Z(G)$ sau $y \in Z(G)$ egalitatea are loc $\dots\dots\dots(1p)$

Dacă nu, prin ipoteză $x^2 = e$ și $y^2 = e$. Dacă $xy \in Z(G) \Rightarrow (xy)y = y(xy) \Rightarrow$

$\Rightarrow xy^2 = yxy \Rightarrow x = yxy \mid \cdot y \Rightarrow xy = yx \dots\dots\dots(3p)$

Dacă $xy \notin Z(G)$, din ipoteză

$(xy)^2 = e \Rightarrow xyxy = e \Rightarrow x^2yxy = x \Rightarrow yxy = x \mid \cdot y \Rightarrow xy = yx \dots\dots\dots(3p)$

(SAU Prin reducere la absurd, presupunem că $\exists x, y \in G$ astfel încât $xy \neq yx$.

Atunci $x, y \notin Z(G)$, deci $x^2 = e, y^2 = e \dots\dots\dots(1p)$

Arătăm $xy \notin Z(G)$. Presupunem $x(xy) = (xy)x$. Deci

$x^2y = yxy \Rightarrow y = yxy \mid \cdot x \Rightarrow xy = yx$ - contradicție $\Rightarrow xy \notin Z(G) \dots\dots\dots(3p)$

Din ipoteză $(xy)^2 = e \Rightarrow xyxy = e \Rightarrow x^2yxy = x \Rightarrow yxy = x \mid \cdot y \Rightarrow xy = yx$.

Contradicția arată că ipoteza a fost falsă $\Rightarrow G$ este abelian $\dots\dots\dots(3p))$

3. a) $f(1) = \int_0^1 e^{|x-1|} dx = \int_0^1 e^{1-x} dx = -e^{1-x} \Big|_0^1 = -1 + e \dots\dots\dots(2p)$

b) Pentru $a \leq 1$ se obține $f(a) = \int_0^{a^2} e^{a-x} dx = e^a - e^{a-a^2}$ (2p)

Pentru $a > 1$ se obține $f(a) = \int_0^a e^{a-x} dx + \int_a^{a^2} e^{x-a} dx = e^{a^2-a} + e^a - 2$ (2p)

$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} \frac{f(a)}{a} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} \frac{e^a - e^{a-a^2}}{a} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} \frac{e^a - e^{a-a^2}(1-2a)}{1} = 0$ (1p)

4. a) Lege de compoziție: $\forall x, y \in G, x * y \in G \Leftrightarrow -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ (1p)

Demonstrarea celor două inegalități(2p)

Asociativitatea(1p)

b) Verificarea relației $f(x * y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G$ (1p)

Datorită asociativității formula $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ se extinde la un număr oarecare de

factori: $f\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \dots * \frac{1}{9}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{45}$ (1p)

Ecuația $f\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \dots * \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{45}$ are soluția $\frac{22}{23}$, deci $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \dots * \frac{1}{9} = \frac{22}{23}$ (1p)

(SAU: Se calculează produsul în mod direct:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \dots * \frac{1}{9} &= \left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \left(\frac{1}{4} * \frac{1}{5}\right) * \left(\frac{1}{6} * \frac{1}{7}\right) * \left(\frac{1}{8} * \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{7} * \frac{3}{7} * \frac{13}{43} * \frac{17}{73} = \\ &= \left(\frac{5}{7} * \frac{3}{7}\right) * \left(\frac{13}{43} * \frac{17}{73}\right) = \frac{168}{192} * \frac{1680}{3360} = \frac{7}{8} * \frac{1}{2} = \frac{22}{23} \end{aligned}$$