

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ – 2015-GORJ

CLASA a IX-a

Barem de notare

1. a) Demonstrați că $3^{n-1} > 2^n - 1, \forall n \in N^*, n \geq 3$;

b) Să se determine numărul natural n pentru care

$$a^n + b^n + c^n + (a + b + c)^n = (a + b)^n + (b + c)^n + (a + c)^n,$$

oricare ar fi $a, b, c \in (0, \infty)$. G.M.

Soluție: a) Inducție după n : $p(3)$: $9 > 7$, adev. Presupunem $p(k)$ adev. și demonstrăm $p(k+1)$: $3^k > 2^{k+1} - 1$.

$$\text{Avem } 3^k = 3^{k-1} \cdot 3 > (2^k - 1) \cdot 3 > 2^{k+1} - 1. \quad (3p)$$

b) Pentru $n=1$ și $n=2$ relația este adevărată. (2p)

Pentru $a=b=c=1$ obținem $3 + 3^n = 3 \cdot 2^n \Leftrightarrow 3^{n-1} = 2^n - 1$ relație care este falsă pentru ≥ 3 . (2p)

2. Rezolvați în N ecuația $[\sqrt{n^2 + 4n + 9}] = 3n - 4$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x . B.M.

Soluție: Avem $\sqrt{(n+2)^2} < \sqrt{n^2 + 4n + 9} < \sqrt{(n+3)^2}$ pentru $n > 0$, deci $[\sqrt{n^2 + 4n + 9}] = n + 2$ pentru $n > 0$. (4p)

Ecuația devine $n+2=3n-4$, cu soluția $n=3$. (2p)

Pentru $n=0$ nu verifică. (1p)

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică ai cărei termeni sunt numere naturale. Dacă progresia are un termen egal cu 1936, arătați că ea conține o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte. B.M.

Soluție: Dacă rația progresiei este 0, atunci toți termenii sunt $1936=44^2$ deci sunt pătrate perfecte. (2p) Dacă rația este nenulă considerăm p astfel încât $a_p = 1936$. Atunci $a_{p+k+1} = a_p + kr$, deci $a_{p+k+1} = 1936 + kr$. Alegem $k = rm^2 + 88m$, unde $m \in \mathbb{N}$, și obținem $a_{p+k+1} = 1936 + r^2m^2 + 88rm = (rm + 44)^2$ este pătrat perfect pentru orice m natural. (5p)

4. Fie ABC un triunghi, $M \in (AB)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ și $N \in (AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Notăm cu P mijlocul lui (BC) și cu R punctul de intersecție al dreptelor AP și MN. Dacă $\overrightarrow{AR} = k \cdot \overrightarrow{AP}$ determinați valoarea lui k. B.M.

Soluție: Din $MP \parallel AN$ deducem $\frac{MP}{AN} = \frac{PR}{AR} \Leftrightarrow \frac{AC:2}{3AC:4} = \frac{PR}{AR} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{PR}{AR} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{AP}{AR} \Rightarrow \overrightarrow{AR} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AP}$. (7p)

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu 7p.