

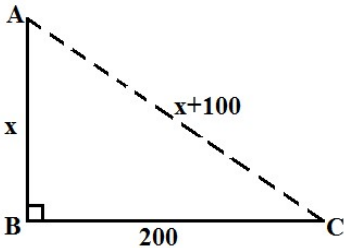
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

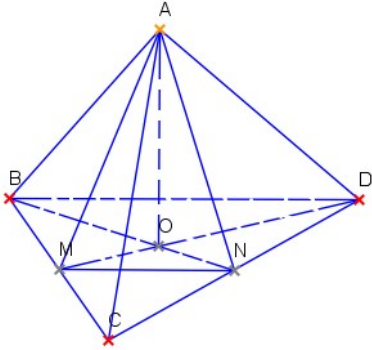
27 ianuarie 2018

BAREM DE NOTARE

CLASA A VIII-A

1.)	Din oficiu	1p
	a) pătratele perfecte mai mici decât 170 sunt 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169	1p
	$170 = 1^2 + 13^2$ sau $170 = 7^2 + 11^2$ etc. deci $170 \in A$ (este suficientă o variantă)	1p
	Presupunem că există $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care $a^2 + b^2 = 71$. Cum 71 este un număr impar rezultă că a^2 sau b^2 este număr par. Fie a^2 număr par, atunci a^2 poate fi 4, 16, 36 sau 64. Cum $b^2 = 71 - a^2$, b^2 poate fi 67, 55, 35 sau 7 care nu sunt pătrate perfecte. Rezultă că 71 nu se poate scrie ca sumă de pătrate, deci $71 \notin A$	2p
	b) Dacă $x, y \in A$, atunci există $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = a^2 + b^2$ și $y = c^2 + d^2$	1p
	$x \cdot y = a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2$	1p
	$x \cdot y = a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2 + 2abcd - 2abcd$	1p
	$x \cdot y = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2, ac + bd \in \mathbb{Z}, ad - bc \in \mathbb{Z}$	1p
	Rezultă că $x \cdot y \in A$	1p
2.)	Din oficiu	1p
	$120 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{45}} + \frac{5}{\sqrt{80}} - \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{2}} \right) = 120 \cdot \left(\frac{3}{3\sqrt{5}} + \frac{5}{4\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{3} \right) = 120 \cdot \left(\frac{3\sqrt{5}}{15} + \frac{5\sqrt{5}}{20} - \frac{\sqrt{5}}{3} \right) =$ $= 120 \cdot \frac{12\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 20\sqrt{5}}{60} = 120 \cdot \frac{7\sqrt{5}}{60} = 14\sqrt{5}$	4p
	$14\sqrt{5} = \sqrt{14^2 \cdot 5} = \sqrt{980} = 31,3\dots$	1p
	Cel mai mare număr de forma $\overline{ab}$, pentru care $\overline{ab} \leq 14\sqrt{5}$, este 31.	1p
	$\overline{ab} = 31 \Rightarrow a = 3, b = 1$	1p
	$a^{-b} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ și $b^{-a} = 1^{-3} = 1$	1p
	$\frac{1}{3} < 1 \Rightarrow a^{-b} < b^{-a}$	1p
3.)	Din oficiu	1p
		1p

	Fie x distanța dintre orașele A și B . Distanța parcursă pe cale ferată între orașele A și C , inițial, are lungimea de $AB + BC = x + 200$.	1p
	Calea ferată, în linie dreaptă, de la A la C , are lungimea de $AC = (x + 200) - 100 = x + 100$.	2p
	$m(\widehat{ABC}) = 90^\circ \xRightarrow{T.Pit.} AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow (x + 100)^2 = x^2 + 200^2$	1p
	$x^2 + 200x + 10000 = x^2 + 40000$	1p
	$200x = 30000$	1p
	$x = 150$. Deci distanța dintre orașele A și B este 150 km.	2p

4.)	Din oficiu	1p
a)	 MN este linie mijlocie în triunghiul BCD, deci $MN = \frac{BD}{2} = 6 \text{ cm}$ $MN \parallel BD \Rightarrow m(\sphericalangle(AN, BD)) = m(\sphericalangle(AN, MN)) = m(\sphericalangle ANM)$ $\triangle ABC : AB = AC = 6\sqrt{2}, BC = 12, (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 = 12^2 \xRightarrow{rec.t.Pit} m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$ Deci triunghiurile ABC și ACD sunt triunghiuri dreptunghice congruente, AM și AN fiind mediane $\Rightarrow AM = AN = \frac{BC}{2} = 6 \text{ cm}$. $AM = AN = MN \Rightarrow m(\sphericalangle(AN, BD)) = 60^\circ$	1p
b)	Fie $MP \perp CD, P \in CD \Rightarrow MP \parallel BN \Rightarrow m(\sphericalangle(AM, BN)) = m(\sphericalangle AMP)$	1p
	MP este linie mijlocie în triunghiul BNC , deci $MP = \frac{1}{2}BN = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$	0,5p
	$\left. \begin{array}{l} \triangle ANP : m(\sphericalangle N) = 90^\circ \\ PN = \frac{CN}{2} = 3 \\ AN = 6 \end{array} \right\} \xRightarrow{t.Pit.} AP = 3\sqrt{5} \text{ cm}$	0,5p
	În triunghiul AMP fie $AE \perp MP$. Dacă $ME = x$, atunci $EP = 3\sqrt{3} - x$, și conform teoremei Pitagora în triunghiurile AEM și AEP , avem $AE^2 = AM^2 - ME^2$, $AE^2 = AP^2 - EP^2$ $36 - x^2 = (3\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{3} - x)^2$ $36 - x^2 = 45 - 27 + 6\sqrt{3}x - x^2 \Leftrightarrow 18 = 6\sqrt{3}x \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ De unde $AE = \sqrt{33} \text{ cm}$.	1p
	$\sin(\sphericalangle AMP) = \frac{AE}{AM} = \frac{\sqrt{33}}{6}$	1p