OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-16 FEBRUARIE 2013
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

SUBIECTUL I

Stabilitatea, asociativitatea,comutativitatea	2p
Elementul neutru este $e=0$.	1p
Simetricul elementului x este elementul $-x$.	1p
Funcția care realizează izomorfismul este $f(x)=\sqrt[2013]{x}$.	1p
Demonstrarea izomorfismului .	2p

SUBIECTUL II

a)	$f(2\pi)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin t}dt$. Cu substituția $t=x+\pi$ obținem: $f(2\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2+\sin x}dx$.	1p
	Cu substituția $y=tg\frac{x}{2}$ obținem: $f(2\pi)=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{tg\frac{-\pi+\varepsilon}{2}}^{tg\frac{\pi+\varepsilon}{2}}\frac{1}{2+\frac{2y}{1+y^2}}\cdot\frac{2}{1+y^2}dy$.	2p
	$f(2\pi)=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg\vert_{tg\frac{-\pi+\varepsilon}{2}}^{tg\frac{\pi-\varepsilon}{2}}$, $f(2\pi)=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.	2p
b)	Fie $g(t)=\frac{1}{2+\sin t}$ și G o primitivă a sa.	
	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2013^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x}\cdot\frac{x}{2013^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2+\sin x}\cdot\frac{1}{\ln 2013}=\frac{1}{2\ln 2013}$.	2p

SUBIECTUL III

$1<\frac{x}{\sin x}\le\frac{\pi}{2};\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$	2p
$\frac{x}{\sin x}\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2x\le\pi\sin x$ $2\cos x\le\pi\sin(\cos x)$	1p

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx$	1p
$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)dx \geq 2\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$	1p
$1 \leq \frac{x}{\sin x} \Rightarrow \sin x \leq x \Rightarrow \sin(\cos x) \leq \cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$.	2p

SUBIECTUL IV

$(G_1,*)$ -grup abelian. $(G_2,\cdot)$ -grup abelian. Funcția $f : G_1 \to G_2$, $f(x) = \cos 2\pi x + i\sin 2\pi x$,este izomorfism.	2p 2p 3p