

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
17.02.2018
CLASA A VII A

Subiectul I

- a) Fie a și b două numere naturale nenule. Arătați că $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ este rațional dacă și numai dacă a și b sunt pătrate perfecte.
- b) Aflați numerele naturale n știind că $\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n! + 8}$ este rațional.

Subiectul II

Fie mulțimea $A = \left\{ m, n > 0 \mid \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2018} \right\}$

- a) Arătați că mulțimea A este nevidă.
- b) Arătați că, dacă $m, n \in A$, atunci $m > 2018$ și $n > 2018$.
- c) Determinați numărul elementelor raționale ale mulțimii

$$B = \left\{ \sqrt{\left(\frac{m}{2018} - 1\right)\left(\frac{n}{2018} - 1\right)} \mid m, n \in A \right\}.$$

Subiectul III

Considerăm triunghiul ABC și M mijlocul laturii $[BC]$.

- a) Fie N mijlocul lui $[AM]$. Paralela prin N la latura AC intersectează laturile AB și BC în D respectiv E . Paralela prin N la AB intersectează laturile AC și BC în F respectiv G . Arătați că $DF \parallel BC$.
- b) Fie X un punct pe $[AM]$. Paralela prin X la latura AC intersectează laturile AB și BC în Q respectiv R . Paralela prin X la AB intersectează laturile AC și BC în S respectiv P . Arătați că $QS \parallel BC$.

Subiectul IV

Fie pătratul $ABCD$ și punctele $M \in (BC)$, $N \in (CD)$ astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{2}$, $\frac{CN}{ND} = 4$.

- a) Demonstrați că $[BM] \equiv [DN]$.
- b) Demonstrați că $m(\angle MAN) = 90^\circ$.
- c) Demonstrați că mijlocul segmentului $[MN]$, punctele B și D sunt coliniare.

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte
Timp de lucru 3 ore*