

Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 17 februarie 2017

Clasa a XII-a - Enunțuri

1. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea " $\circ$ " prin relația $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.
 - a) Să se determine elementele din $\mathbb{Z}$, simetrizabile în raport cu legea " $\circ$ ";
 - b) Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{x \text{ de } 2017 \text{ ori}} = x$.
2. a) Demonstrați că $t^2 \int_a^b f^2(x) dx - 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și orice funcții continue $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
 - b) Folosind eventual punctul anterior, deduceți că pentru orice funcții continue $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are loc inegalitatea

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$
 - c) Demonstrați că $\int_0^1 e^x \sqrt{x} dx \leq \frac{1}{2} \sqrt{e^2 - 1}$.
3. Fie $(S, +, \cdot)$ un inel oarecare cu proprietatea că pentru orice $x, y \in S$ cu $x \cdot y = 0$, avem $y \cdot x = 0$. (unde 0 reprezintă elementul neutru al operației " $+$ ")
 - a) Dacă $a, b \in S$ cu $a \cdot b = 1$ atunci $b \cdot a = 1$ (unde 1 reprezintă elementul neutru al operației " $\cdot$ ");
 - b) Dacă $a, b \in S$ cu $a \cdot b = a + b$, atunci $a \cdot b = b \cdot a$.

Revista de Matematică din Hunedoara

4. a) Fie $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ continuă, diferită de funcția nulă. Demonstrați că $\int_0^1 f(x) dx > 0$.
 - b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm funcțiile continue $f_1, f_2, \dots, f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $\int_0^1 f_k^2(x) dx = \frac{2k-1}{n}$, pentru orice $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Demonstrați că există $\alpha \in [0, 1]$ pentru care $f_1(\alpha) + f_2(\alpha) + \dots + f_n(\alpha) \leq n$.

Supliment Gazeta Matematică**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.