

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

10 februarie 2024

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Determinați toate funcțiile derivabile $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietatea că funcția $1/f$ este o primitivă a funcției f .

Subiectul 2. Calculați:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/n} \frac{2x + 3}{x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1} dx.$$

Subiectul 3. Fie G un grup cu proprietatea că $x^2 = e$, oricare ar fi $x \in G$. Demonstrați că:

- a) G este grup comutativ;
- b) dacă în plus G este finit, atunci el are 2^n elemente, pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Subiectul 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup și H o submulțime a lui G , cu $H \neq \emptyset$ și $H \neq G$.

Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) H este subgrup al lui G ;
- ii) pentru orice $x \in H$ și $y \in G \setminus H$, avem: $xy \in G \setminus H$.

Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.