

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17.02.2018
Clasa a VII-a

Barem de evaluare și notare

1. i) Arătați că există numerele $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât: $a + b - ab$ este număr întreg
ii) Determinați perechile (a, b) de numere întregi pentru care $a + b - ab = 5$.

Fixează o valoare pentru a și o valoare pentru $a + b - ab$ apoi determină b	2p
Scrie pe a sub forma: $a = 1 + \frac{4}{1-b} \in \mathbb{Z}$	2p
Impune condiția: $(1-b) \mid 4$ și scrie $1-b \in D_4 = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$	1p
Finalizează: $(a, b) \in \{(5, 0), (3, -1), (2, -3), (-3, 2), (-1, 3), (0, 5)\}$	2p

2. Să se arate că $3^{2017} + 4^{2017} + 5^{2017} < 6^{2017}$

Găsește $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ și $3^4 + 4^4 + 5^4 < 6^4$	1p
Scrie $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ și $3^4 + 4^4 + 5^4 < 6^4$	2p
Scrie $3^{2013} + 4^{2013} + 5^{2013} = (3^3)^{671} + (4^3)^{671} + (5^3)^{671} < (3^3 + 4^3 + 5^3)^{671} = 6^{2013}$	2p
Scrie $(3^{2017} + 4^{2017} + 5^{2017}) < (3^4 + 4^4 + 5^4)(3^{2013} + 4^{2013} + 5^{2013}) < 6^4 \cdot 6^{2013} = 6^{2017}$	2p

3. Se consideră triunghiul ABC, $m(\angle A) = 90^\circ$ și $AC < AB$. Pe $AC, (AB), BC$ se iau respectiv punctele E, F și D (diferite de vârfurile triunghiului) astfel încât $AC = AE = AF = AD$. Demonstrați că $m(\angle EDF) = 45^\circ$.

Construcția figurii	1p
$AD = \frac{CE}{2} \Rightarrow \triangle CDE$ dreptunghic $\Rightarrow m(\angle CDE) = 90^\circ$.	2p
Notăm $m(\angle CDA) = x \Rightarrow m(\angle ADE) = 90^\circ - x$. În $\triangle CAD \Rightarrow m(\angle CAD) = 180^\circ - 2x$. $\triangle FAD \Rightarrow m(\angle ADF) = \frac{180^\circ - (2x - 90^\circ)}{2} = 135^\circ - x$.	2p
$m(\angle EDF) = 135^\circ - x - m(\angle ADE) = 135^\circ - x - (90^\circ - x) = 45^\circ$.	2p

4. Se consideră un paralelogram $ABCD$ și $M \in (BC)$ astfel încât $2 \cdot BM = BC$. Se notează $(AM) \cap (BD) = \{N\}$.
- i) Determinați numărul rațional p , pentru care $p \cdot BN = BD$.
- ii) Calculați aria triunghiului BNM , știind că aria triunghiului ABC este egală cu 30 cm^2

Construcția figurii	1p
i) $\triangle NMB \sim \triangle NAD \Rightarrow \frac{NB}{ND} = \frac{NM}{NA} = \frac{MB}{AD}$	1p
$\frac{NB}{ND} = \frac{MB}{AD} = \frac{\frac{BC}{2}}{AD} = \frac{AD}{2} \cdot \frac{1}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot BN = ND$	1p
$p = 3$	1p
ii) N este centrul de greutate al $\triangle ABC$	1p
$A_{\triangle NBC} = \frac{A_{\triangle ABC}}{3} = 10 \text{ cm}^2$	1p
$[NM]$ - mediană în $\triangle NBC \Rightarrow A_{\triangle BNM} = \frac{A_{\triangle NBC}}{2} = 5 \text{ cm}^2$	1p