

# Olimpiada Națională de Matematică - Etapa locală

## Clasa a XI – a

### VARIANTA 1

#### BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

1. Considerăm matricele  $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $X = A + i \cdot B$  și  $Y = A - i \cdot B$ . .....2p

Rezultă că  $X \cdot Y = A^2 + B^2 + i \cdot (B \cdot A - A \cdot B) = (\alpha - i) \cdot (A \cdot B - B \cdot A)$ . .....1p

Deci  $\det(X \cdot Y) = (\alpha - i)^n \cdot \det(A \cdot B - B \cdot A)$  ..... 1p

Cum  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , rezultă că  $\det(A \cdot B - B \cdot A) \in \mathbb{R}$ , iar

$\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y) = \det(X) \cdot \overline{\det(X)} = |\det(X)|^2 \in \mathbb{R}$ . .....2p

Prin urmare,  $(\alpha - i)^n \in \mathbb{R}$  .....1p

2.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(a+x)} - 1}{x \ln(a+x)} \ln(a+x) = \ln a \quad (2p)$$

b)

$$x - a = y \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(a+b+y)^{a+y} - (a+b)^a}{y} \quad (1p) =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(a+b+y)^{a+y} - (a+b+y)^a + (a+b+y)^a - (a+b)^a}{y} \quad (2p) =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(a+b+y)^a ((a+b+y)^y - 1)}{y} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(a+b)^a \left( \left(1 + \frac{y}{a+b}\right)^a - 1 \right)}{\frac{y}{a+b}} \cdot \frac{1}{a+b} \quad (1p) =$$

$$= (a+b)^a \cdot \ln(a+b) + a \cdot (a+b)^{a-1} \quad (1p)$$

3. Folosim egalitatea  $\cos(x - 2k\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$  .....1 punct

Punând  $2k = n(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  și  $x = n\pi \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + an + b}$ , obținem: .....1 punct

$$a_n = \cos\left(n\pi \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + an + b}\right) = \cos\left(n\pi \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + an + b} - n(n+1)\pi\right) =$$

$$= \cos\left(n\pi \left(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + an + b} - n - 1\right)\right) = \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$= \cos \left[ n\pi \cdot \frac{n^3 + 3n^2 + an + b - (n+1)^3}{\sqrt{(n^3 + 3n^2 + an + b)^2 + (n+1)^3 \sqrt{n^3 + 3n^2 + an + b} + (n+1)^2}} \right] =$$

$$= \cos \left[ n\pi \cdot \frac{(a-3)n + b}{\sqrt{(n^3 + 3n^2 + an + b)^2 + (n+1)^3 \sqrt{n^3 + 3n^2 + an + b} + (n+1)^2}} \right] \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \cos \frac{\pi}{3} (a-3)$  .....2puncte

4. Cum  $x_1 > 0$ , presupunând ca  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  obținem că  $\ln(x_{k+1}) = x_1 + x_2 + \dots + x_n > 0$ , deci  $x_{k+1} > 1 > 0$ ,  $(\forall) k \in \mathbb{N}^*$ , și atunci prin inducție matematică am arătat ca  $x_n > 0$   $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ .-----  
-----2p

Din  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \ln(x_{n+1})$ ,  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \ln(x_n)$ ,  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$

$\Rightarrow 0 < x_n = \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ ,  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2) \Rightarrow (x_n)_{n \geq 2}$  este

$\uparrow \text{-----} -1p \Rightarrow (x_n)$

$n \geq 2$  are limita în  $\overline{\mathbb{R}}_+^*$   $\Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$  are limita în  $\overline{\mathbb{R}}_+^*$ .....1p

Presupunem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}_+^*$ . Atunci trecând la limită în egalitatea:

$\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = x_n$ ,  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$  (\*) obținem că  $\ln 1 = x$ , adică

$x = 0$ . Contradicție!  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .-----1p

Mai mult, din (\*) avem  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{x_n}$ ,  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$  și  $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1/x_n} = e$ ,  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$ , de unde

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1/x_n} = e$ .-----2p

**Notă:**

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Se acordă numai punctaje întregi.