



BAREM DE CORECTARE
Clasa a XII-a M1

1. a. Inecuația este echivalentă cu $(3x-1)^2 \geq 0$ 2p

b. Din a. rezultă că $a^2 + 1 \geq \frac{2}{3}a + \frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{a}{a^2 + 1} \leq \frac{9a}{6a + 8}$ și analoagele.....2p

Rămâne să demonstrăm că $\frac{9a}{6a+8} + \frac{9b}{6b+8} + \frac{9c}{6c+8} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{3a+4} + \frac{1}{3b+4} + \frac{1}{3c+4} \geq \frac{3}{5}$
care este adevărată din inegalitatea lui T. Andreescu:

$$\frac{1^2}{3a+4} + \frac{1^2}{3b+4} + \frac{1^2}{3c+4} \geq \frac{(1+1+1)^2}{3(a+b+c)+12} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \dots\dots\dots 3p$$

2. Ecuația se scrie $\{x\}^2 + 22\{x\} = 10([x] + \{x\}) - 9 \Leftrightarrow \{x\}^2 + 12\{x\} = 10[x] - 9 \dots 1p$

Deoarece $\{x\} \in [0,1) \Rightarrow \{x\}^2 + 12\{x\} \in [0,13) \Rightarrow 10[x] - 9 \in [0,13) \Rightarrow [x] \in \left[\frac{9}{10}, \frac{22}{10}\right)$

adică $[x] = 1$ sau $[x] = 2$ 3p

Pentru $[x] = 1$ se obține $\{x\}^2 + 12\{x\} - 1 = 0$ cu soluția admisibilă $\{x\} = -6 + \sqrt{37}$ adică

$x = -5 + \sqrt{37}$ iar pentru $[x] = 2$ se obține $\{x\}^2 + 12\{x\} - 11 = 0$ cu soluția admisibilă

$\{x\} = -6 + \sqrt{47}$ adică $x = -5 + \sqrt{47}$ 3p

3. Notăm $\frac{BM}{MC} = k, \frac{CN}{NA} = p, \frac{AP}{PB} = q$.

Atunci $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k} = \overrightarrow{MA'}$

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{1}{k+1}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deci } \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA'} = \frac{2\overrightarrow{AB} + (k-1)\overrightarrow{AC}}{k+1} \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{NB'} = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{p+1}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1-p}{p+1}\overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 2p$$



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN MARAMUREȘ



MINISTERUL
EDUCAȚIEI NAȚIONALE
ȘI CERCETĂRII
ȘTIINȚIFICE

Dar $C \in (A'B') \Leftrightarrow \overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CB'}$ sunt coliniari

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2}{1+k}}{-1} = \frac{\frac{k-1}{k+1}}{\frac{1-p}{p+1}} \Leftrightarrow \frac{2}{p+1} = \frac{k-1}{p-1} \Leftrightarrow pk - 3p + k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3p-1}{p+1} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Analog } A \in (B'C'), B \in (C'A') \Leftrightarrow p = \frac{3q-1}{q+1}, q = \frac{3k-1}{k+1}.$$

$$\text{Substituind avem } p = \frac{2k-1}{k} \Rightarrow k = \frac{5k-3}{3k-1} \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k=1 \Rightarrow p=q=1..1p$$