

Barem clasa a VII a

Subiectul I

a) $x=0$ verifică ecuația: $\sqrt{2020} - \sqrt{2020} = 0$.

b) Conform punctului precedent o soluție este $x_1 = 0$

Căutăm soluții $x > 0$:

$$(\sqrt{2020+x} - \sqrt{2020-x})^2 = x^2$$

$$2020+x+2020-x-2\sqrt{(2020+x)(2020-x)} = x^2$$

$$4040 - x^2 = 2\sqrt{2020^2 - x^2} \geq 0, \text{ de unde } x^2 \leq 4040 \quad (*)$$

După o nouă ridicare la pătrat în ambii membri, rezultă

$$4040^2 - 8080 \cdot x^2 + x^4 = 4(2020^2 - x^2)$$

$$x^4 - 8076 \cdot x^2 + 4040^2 - 2^2 \cdot 2020^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 8076) = 0$$

Obținem $x=0$ sau $x^2=8076$.

Am presupus $x > 0$,

iar $x^2=8076$ este în contradicție cu inegalitatea (*)

Deci ecuația nu are soluții reale strict pozitive.

Dacă ecuația ar avea soluții $x < 0$, atunci $x = -y$ cu $y > 0$ și se verifică

ecuația în y :

$$\sqrt{2020-y} - \sqrt{2020+y} = -y \Leftrightarrow \sqrt{2020+y} - \sqrt{2020-y} = y,$$

ecuație despre care am arătat că nu are soluții strict pozitive.

Deci ecuația din enunț are singura soluție reală $x=0$.

Subiectul II.

Ecuția se poate scrie sub forma $y(x^2-3)=2x-1$. (1,5 p)

Obținem $y = \frac{2x-1}{x^2-3} \in \mathbb{Z}$ deci $x^2-3/2x-1$. (1) (1 p)

Din (1) și x^2-3/x^2-3 avem $x^2-3/2x^2-x$ și $x^2-3/2x^2-6$, deci $x^2-3/x-6$. (2) (1 p)

Din (1) și (2) deducem $x^2-3/11$. (1 p)

Rezultă $x^2-3 \in D_{11} = [-11; -1; 1; 11]$. (0,5 p)

Așadar $x^2 \in [-8; 2; 4; 14]$ și convine doar $x^2=4$. (1 p)

Soluția este $(x; y) \in [(-2; -5); (2; 3)]$. (1 p)

SUBIECTUL III

a) Din ipoteză $\Rightarrow B'D \parallel BD'$ și

$$m(\widehat{ABB'}) = m(\widehat{B'BC}) = 45^\circ = m(\widehat{ADD'}) = m(\widehat{D'DC}) = 45^\circ (1) (1 \text{ punct})$$

$\Delta DAD'$ și $\Delta BCC'$ sunt dreptunghice isoscele $\Rightarrow m(\widehat{ADD'}) = m(\widehat{B'CB}) = 45^\circ \Rightarrow$

$$m(\widehat{DB'B}) = m(\widehat{CD'D}) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ (2) (1 \text{ punct}).$$

Din (1) și (2) $BB'DD' = \text{paralelogram} (0,5 \text{ puncte})$

a) notăm lungimea dreptunghiului cu $x+6 \Rightarrow P = 2(X+6) + 12 \Rightarrow X=3 (1 \text{ punct}) \Rightarrow$

$$A_{ABCD} = 54, A_{ABB'D} = 36, A_{AD'B'D} = 27 \Rightarrow A_{B'D'B} = 1/6 A_{ABCD}. (1,5 \text{ puncte})$$

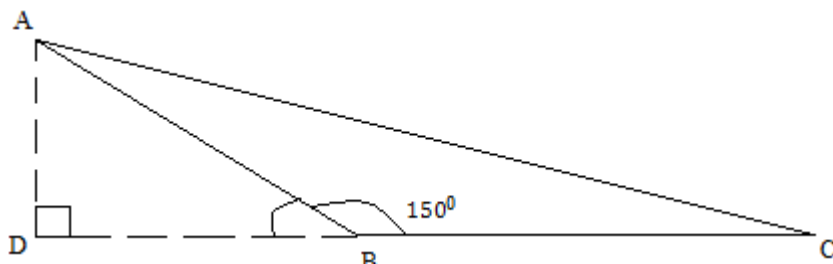
c) Din a) $BB'DD' = \text{paralelogram} \Rightarrow BD \cap B'D' = \{O\} (0,5 \text{ puncte})$, ducem $OO' \perp AB$, cum punctul

O înjumătățește diagonalele $\Rightarrow OP$ - linie mijlocie în trapezul $D'B'D (0,5 \text{ puncte})$, $OP = \frac{B'D + D'A}{2}$

, $OP = 4,5 = \frac{AB}{2} \Rightarrow O'$ este mijlocul lui AB , punctele sunt coliniare în această ordine A

- $O' - D' - B$. (1 punct)

SUBIECTUL IV



$$A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2}, \text{ unde } pr_{BC}(A) = [D].$$

În ΔADB , $m(\angle D) = 90^\circ$, $m(\angle DBA) = 30^\circ \Rightarrow AD = \frac{AB}{2}$, conform Teoremei unghiului de 30° .

$$A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot \frac{AB}{2}}{2} = \frac{AB \cdot BC}{4}.$$

Pentru laturile triunghiului AB , BC , indiferent de ordinea stabilită, rezultă relația:

$$(AB - BC)^2 \geq 0, \text{ atunci } AB^2 - 2 \cdot AB \cdot BC + BC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \geq 0 \Rightarrow$$

$$AB^2 + BC^2 \geq 8x.$$

Baremul este orientativ, orice alta varianta corecta se va puncta corespunzator