



**Olimpiada de Matematică – Etapa Locală**

**Maramureș – 29 februarie 2020**

**Clasa a V - a**

**Barem de corectare și notare**

1. a) Arătați că numărul :

$$A = (2^8 \cdot 2^5 \cdot 2^7)^2 : 4^{15} + (4^{16} : 2^{32} - 2^0) \cdot (2^4 \cdot 3^4 - 6^4) \text{ este pătrat perfect .}$$

b) Numărul natural  $a$  împărțit la numărul natural nenul  $b$  dă câtul 5 și restul 3 . Arătați că numărul  $2a - 10b + 119$  este cub perfect .

**Rezolvare .**

a) Scriem  $A = (2^{20})^2 : (2^2)^{15} + (2^{32} : 2^{32} - 2^0) \cdot (6^4 - 6^4) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

$$A = 2^{40} : 2^{30} + 0 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$A = 2^{10} = (2^5)^2 \text{ -pătrat perfect} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

b)  $a = 5b + 3 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$$2a - 10b + 119 = 10b + 6 - 10b + 119 = 125 = 5^3 \text{ - cub perfect} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

2. Aflați toate numerele  $\overline{xyzt} = 2020 + 10 \cdot (y - t + x - z)$  .

**Rezolvare.** Membrul drept este multiplu de 10 atunci  $t = 0$  .  $\dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$$\overline{xyz} \cdot 10 = 202 \cdot 10 + 10 \cdot (y - t + x - z) \Rightarrow \overline{xyz} = 202 + y + x - z \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

În cazul lui  $x$  convin doar valorile 1 sau 2 .

**Cazul I.** Dacă  $x = 1$  avem  $\overline{1yz} = 203 + y - z$  adică  $9y + 2z = 103$  ecuație care nu are soluții deoarece membrul stâng cu valorile  $y = 9$  și  $z = 9$  are valoarea 99.....1 punct

**Cazul II.** Dacă  $x = 2$  avem  $\overline{2yz} = 204 + y - z$  adică  $9y + 2z = 4$  ecuație care este verificată de  $y = 0$  și  $z = 2 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

În concluzie  $\overline{xyzt} = 2020 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$



3. Într-o clasă sunt 30 de elevi. Dacă băieții ar fi cu doi mai puțini, atunci jumătate din numărul lor ar reprezenta de două ori mai mult decât a treia parte din numărul fetelor. Determinați numărul băieților și al fetelor din clasă .

**Rezolvare .** Notăm  $a$ =numărul fetelor și  $b$ =numărul băieților .

$$a + b = 30 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$(b - 2) : 2 = 2 \cdot (a : 3) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{Putem înmulți relația de mai sus cu 6 și avem } 3b - 6 = 4 \cdot a \Rightarrow 3b = 4a + 6 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Dar } 3b = 90 - 3a \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Atunci } 4a + 6 = 90 - 3a \Rightarrow a = 12 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{În final } b = 18 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

4. Fie șirul de numere :  $1, 2, 3, \dots, 2020$  .

a) Determinați numărul termenilor din șir care se împart la 3.

b) Calculați suma termenilor din șir care se împart exact la 3 sau la 5.

**Rezolvare .** a) Multiplii de 3 sunt  $3, 6, 9, 12, \dots, 2019$  iar numărul lor este 673 .....1 punct

b) Multiplii de 5 sunt  $5, 10, 15, 20, \dots, 2015$  fiind în număr de 403 .....1 punct

Multiplii de 3 și de 5 sunt multiplii de 15 adică  $15, 30, 45, \dots, 2010$  și sunt 134 .....1 punct .

$$\text{Calculăm sumele } S_1 = 3 + 6 + 9 + \dots + 2019 = 2022 \cdot 673 : 2 = 680403 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$S_2 = 5 + 10 + 15 + \dots + 2015 = 2020 \cdot 403 : 2 = 407030 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$S_3 = 15 + 30 + 45 + \dots + 2010 = 2025 \cdot 134 : 2 = 135675 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Suma căutată în final este : } S = 680403 + 407030 - 135675 = 951758 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$