

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

Clasa a XI-a M₁

Faza locală

17 februarie 2018

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Nu se acorda fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul 1.(7p)

Pentru $k=1 \Rightarrow B = I_n + A$ 1p

Pentru $k=2 \Rightarrow B + B^2 = 2I_n + 3A$ 1p

$B + B^2 = 2I_n + 3A + A^2$, deci $A^2 = O_n \Rightarrow A^m = O_n, \forall m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ 2p

$\Rightarrow B^m = (I_n + A)^m = I_n + mA$ de unde rezultă relația. 2p

În concluzie $A^2 = O_n$ 1p

Subiectul 2.(7p)

a) Pentru $n=1$ egalitatea este verificată 1p

Folosind relațiile $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ și $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 1p

Verificare prin inducție 2p

b) Avem $\det A^k = (\det A)^k = \cos^k 2x$. Deci $\sum_{k=1}^n \det A^k = \cos 2x + \cos^2 2x + \dots + \cos^n 2x = S_n$

Rezultă $\sum_{k=1}^n A^k = \begin{pmatrix} \frac{n+S_n}{2} & \frac{n-S_n}{2} \\ \frac{n-S_n}{2} & \frac{n+S_n}{2} \end{pmatrix}$ 1p

Se obține: $\det \left(\sum_{k=1}^n A^k \right) = \frac{(n+S_n)^2}{4} - \frac{(n-S_n)^2}{4} = n \cdot S_n$ 1p



$$\text{Deci } \frac{\sum_{k=1}^n \det A^k}{\det \left(\sum_{k=1}^n A^k \right)} = \frac{S_n}{n \cdot S_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 3.(7p)

a) $a_n > 0$ prin inducție, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n^2 + a_n + 1} > 0$ oricare ar fi n natural, deci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător.

Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ar fi mărginit, ar rezulta convergent, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (finit) și, trecând la

limită în relația de recurență $\Rightarrow a = a + \frac{1}{a^2 + a + 1}; \frac{1}{a^2 + a + 1} = 0; a$ finit (Fals), deci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător și nemărginit $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 3p

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}} \right)^3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{a_n^2 + a_n + 1} \right)^3 - a_n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3a_n^2}{a_n^2 + a_n + 1} + \right. \\ &\left. + \frac{3a_n}{(a_n^2 + a_n + 1)^2} + \frac{1}{(a_n^2 + a_n + 1)^3} \right] = 3. \text{ Cum } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ se obține că } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{3} \dots\dots\dots 4p \end{aligned}$$

Subiectul 4.(7p)

$$-|x^3| \leq f(x) - x \sin x \leq |x^3| \text{ adunăm } x \sin x \text{ și împărțim cu } x^2, \quad x \neq 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} - |x| \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x} + |x| \dots\dots\dots 1p$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - |x| \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + |x| \right) = 1, \text{ deci } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1 \dots\dots\dots 3p$$