

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem clasa a XI-a

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

PROBLEMA 1

Rezolvați ecuația $X^3 = \begin{pmatrix} 76 & 49 \\ 49 & 76 \end{pmatrix}$, $X \in M_2(\mathbb{R})$.

(Autor prof. Fărcaș Nicolae, Colegiul Național „Silvania” Zalău)

Soluție

Deoarece $X^3 \cdot X = X \cdot X^3$, avem:

$$\begin{cases} X^3 \cdot X = \begin{pmatrix} 76 & 49 \\ 49 & 76 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76a + 49c & 76b + 49d \\ 49a + 76c & 49b + 76d \end{pmatrix} \\ X \cdot X^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 76 & 49 \\ 49 & 76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76a + 49b & 49a + 76b \\ 76c + 49d & 49c + 76d \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{Se arată prin inducție că } X^n = \begin{pmatrix} \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2} \\ \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2} \end{pmatrix}, n \geq 1 \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$$

$$\text{Pentru } n=3 \text{ avem } X^3 = \begin{pmatrix} \frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{2} & \frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{2} \\ \frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{2} & \frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 & 49 \\ 49 & 76 \end{pmatrix}$$

$$\text{Obținem } \begin{cases} (a+b)^3 + (a-b)^3 = 152 \\ (a+b)^3 - (a-b)^3 = 98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}, \text{ deci } X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

PROBLEMA 2

Fie $A \in M_2(C)$ cu $\text{tr}(A) = 1$ și $\det(A) = 2$. Demonstrați că $\det(A^2 - I_2) + \det(A^2 + I_2) + \det(A^2 + 2I_2) = 12$.