

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a X-a

Soluții

1. Se explicitază modulele.

Cazul I: $x \in (-\infty, -1)$. Ecuația devine $3^{-x-1} + 3^x - 4 = 0$.

Se face substituția $3^x = t > 0$ și se obține ecuația $3t^2 - 12t + 1 = 0$ cu soluțiile

$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{33}}{3} > 0$. Cum $\log_3 \frac{6 - \sqrt{33}}{3} \in (-\infty, -1)$ și $\log_3 \frac{6 + \sqrt{33}}{3} \notin (-\infty, -1)$ rezultă că soluția

în acest caz este $S_I = \left\{ \log_3 \frac{6 - \sqrt{33}}{3} \right\}$

Cazul II: $x \in [-1, 0)$. Ecuația devine $3^{x+1} + 3^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \notin [-1, 0)$.

Deci $S_{II} = \emptyset$

Cazul III: $x \in [0, \infty)$. Ecuația devine $3^{x+1} - 3 \cdot 3^x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$.

Deci $S_{III} = [0, \infty)$

Soluția finală este $S = \left\{ \log_3 \frac{6 - \sqrt{33}}{3} \right\} \cup [0, \infty)$

2. Se știe că f este bijectivă dacă și numai dacă ecuația $f(x) = z, x \in \mathbb{R}$ are soluție unică pentru orice $z \in A$.

Fie $z \in A$, adică $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$ și $z \neq -1$.

Din $f(x) = z$ și $z \neq -1$ se obține $x = \frac{z-1}{i(z+1)}$

Rămâne de arătat că $x \in \mathbb{R}$.

Se știe că $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \bar{x}$

Se folosește că $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$ și se calculează

$$x - \bar{x} = \frac{z-1}{i(z+1)} - \frac{\bar{z}-1}{-i(\bar{z}+1)} = 0$$

Se obține $x = \frac{z-1}{i(z+1)} \in \mathbb{R}$ soluție unică a ecuației $f(x) = z$.

3. Se verifică $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$, $\forall z, z' \in \mathbb{C}$

Se aplică relația de mai sus, pe rând, numerelor z_1 și z_2 , z_2 și z_3 respectiv z_3 și z_1 .

Din $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ și $|z_2 + z_3|^2 + |z_2 - z_3|^2 = 2(|z_2|^2 + |z_3|^2)$, folosind ipoteza, se obține $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$. Analog $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$

Fie A, B, C imaginile geometrice asociate numerelor complexe z_1, z_2, z_3 distincte două câte două cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$

Se deduce că punctele A, B, C sunt situate pe un cerc având centrul în originea reperului cartezian și raza $|z_1| > 0$

Din $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ rezultă $AB = BC = CA$, ceea ce arată că triunghiul ABC este echilateral.

4. Se notează $\lg x = a, \lg y = b, \lg z = c$.

Din $x, y, z > 1 \Rightarrow a, b, c > 0$.

Inegalitatea de demonstrat devine $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$ (*).

Notând $b+2c = A, c+2a = B, a+2b = C$ se arată că

$\frac{a}{b+2c} = \frac{1}{9} \left(\frac{C}{A} + 4 \frac{B}{A} - 2 \right), \frac{b}{c+2a} = \frac{1}{9} \left(\frac{A}{B} + 4 \frac{C}{B} - 2 \right), \frac{c}{a+2b} = \frac{1}{9} \left(\frac{B}{C} + 4 \frac{A}{C} - 2 \right)$ cu $A, B, C > 0$ și rămâne de demonstrat $\left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A} \right) + \left(\frac{B}{C} + \frac{C}{B} \right) + \left(\frac{C}{A} + \frac{A}{C} \right) + 3 \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{A} \right) - 6 \geq 9$ (**)

Din inegalitatea mediilor rezultă

$\frac{A}{B} + \frac{B}{A} \geq 2, \frac{B}{C} + \frac{C}{B} \geq 2, \frac{C}{A} + \frac{A}{C} \geq 2$ și $\frac{A}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{A} \geq 3$, ceea ce demonstrează (**).

Altfel, se aplică inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2, \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3\}$

Notând $\sqrt{\frac{a}{b+2c}} = x_1; \sqrt{a(b+2c)} = y_1 \dots$

Se obține $\left(\sum \frac{a}{b+2c} \right) \left(\sum a(b+2c) \right) \geq \left(\sum a \right)^2$ și rămâne de arătat $\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1$

Cu $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ (adev.) sau din nou CBS.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a X-a

Bareme

1. Se explicitează modulele1p

Cazul I: $x \in (-\infty, -1)$. Ecuația devine $3^{-x-1} + 3^x - 4 = 0$.

Se face substituția $3^x = t > 0$ și se obține ecuația $3t^2 - 12t + 1 = 0$ cu soluțiile

$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{33}}{3} > 0$. Cum $\log_3 \frac{6 - \sqrt{33}}{3} \in (-\infty, -1)$ și $\log_3 \frac{6 + \sqrt{33}}{3} \notin (-\infty, -1)$ rezultă că soluția

în acest caz este $S_I = \left\{ \log_3 \frac{6 - \sqrt{33}}{3} \right\}$ 3p

Cazul II: $x \in [-1, 0)$. Ecuația devine $3^{x+1} + 3^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \notin [-1, 0)$.

Deci $S_{II} = \emptyset$ 1p

Cazul III: $x \in [0, \infty)$. Ecuația devine $3^{x+1} - 3 \cdot 3^x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$.

Deci $S_{III} = [0, \infty)$ 1p

Soluția finală este $S = \left\{ \log_3 \frac{6 - \sqrt{33}}{3} \right\} \cup [0, \infty)$ 1p

2. Se știe că f este bijectivă dacă și numai dacă ecuația $f(x) = z, x \in \mathbb{R}$ are soluție unică pentru orice $z \in A$ 1p

Fie $z \in A$, adică $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$ și $z \neq -1$.

Din $f(x) = z$ și $z \neq -1$ se obține $x = \frac{z-1}{i(z+1)}$ 2p

Rămâne de arătat că $x \in \mathbb{R}$.

Se știe că $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \bar{x}$ 1p

Se folosește că $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$ și se calculează

$x - \bar{x} = \frac{z-1}{i(z+1)} - \frac{\bar{z}-1}{-i(\bar{z}+1)} = 0$ 2p

Se obține $x = \frac{z-1}{i(z+1)} \in \mathbb{R}$ soluție unică a ecuației $f(x) = z$...1p

Altfel, f injectivă2p

f surjectivă4p

Concluzie1p

3. Se verifică $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$, $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ 3p

Se aplică relația de mai sus, pe rând, numerelor z_1 și z_2 , z_2 și z_3 respectiv z_3 și z_1

Din $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ și $|z_2 + z_3|^2 + |z_2 - z_3|^2 = 2(|z_2|^2 + |z_3|^2)$, folosind ipoteza, se obține $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$. Analog $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$ 3p

Fie A, B, C imaginile geometrice asociate numerelor complexe z_1, z_2, z_3 distincte două câte două cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$

Se deduce că punctele A, B, C sunt situate pe un cerc având centrul în originea reperului cartezian și raza $|z_1| > 0$

Din $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ rezultă $AB = BC = CA$, ceea ce arată că triunghiul ABC este echilateral.....1p

4. Se notează $\lg x = a, \lg y = b, \lg z = c$. Din $x, y, z > 1 \Rightarrow a, b, c > 0$ 1p

Inegalitatea de demonstrat devine $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$ (*)1p

Notând $b+2c = A, c+2a = B, a+2b = C$ se arată că

$\frac{a}{b+2c} = \frac{1}{9} \left(\frac{C}{A} + 4 \frac{B}{A} - 2 \right), \frac{b}{c+2a} = \frac{1}{9} \left(\frac{A}{B} + 4 \frac{C}{B} - 2 \right), \frac{c}{a+2b} = \frac{1}{9} \left(\frac{B}{C} + 4 \frac{A}{C} - 2 \right)$ cu $A, B, C > 0$ și rămâne de demonstrat $\left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A} \right) + \left(\frac{B}{C} + \frac{C}{B} \right) + \left(\frac{C}{A} + \frac{A}{C} \right) + 3 \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{A} \right) - 6 \geq 9$ (**).3p

Din inegalitatea mediilor rezultă

$\frac{A}{B} + \frac{B}{A} \geq 2, \frac{B}{C} + \frac{C}{B} \geq 2, \frac{C}{A} + \frac{A}{C} \geq 2$ și $\frac{A}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{A} \geq 3$, ceea ce demonstrează (**)...2p

Altfel, se aplică inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2, \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3\}$...1p

Notând $\sqrt{\frac{a}{b+2c}} = x_1; \sqrt{a(b+2c)} = y_1, \dots$ 2p

Se obține $\left(\sum \frac{a}{b+2c} \right) \left(\sum a(b+2c) \right) \geq \left(\sum a \right)^2$ 2p

și rămâne de arătat că $\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1$2p