

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17.02.2018
Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție "*" care verifică următoarele proprietăți:

- i) $(x * y) \cdot (x * z) = x * (y + z), \forall x, y, z \in M$
ii) $x * 1 = x, \forall x \in M.$

(a) Arătați că numărul $p = 16 * \frac{1}{2}$ este întreg.

(b) Determinați numărul natural m pentru care dacă $\sqrt{2018} * 2018 = 2018^m$.

2. Se consideră matricele $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \frac{\sin t}{2} \\ -2 \sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ și mulțimea $H = \{A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid t \in \mathbb{R}\}.$

Arătați că:

- (a) mulțimea H are o structură de grup în raport cu înmulțirea matricelor.
(b) grupul multiplicativ $(H, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +).$

3. (a) Determinați mulțimea $\mathcal{A} = \int \frac{1}{x(2+x^6)} dx, x \in (0, +\infty).$

Gazeta Matematică 12/2017

(b) Arătați că, dacă $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$ cu proprietatea că $F(1) = \pi,$ atunci numărul $F(0)$ este întreg.

4. Se consideră funcția $f_n : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = tg^n x, n \in \mathbb{N}^*$ și se notează cu F_n o primitivă oarecare a funcției $f_n.$

(a) Arătați că, dacă $F_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln(2e),$ atunci numărul $L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F_1(x)$ este întreg;

(b) Calculați $M = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F_3(x),$ știind că $F_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln \frac{\sqrt{2}e}{2}.$

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte