

# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 9 februarie 2024

Soluţii

Clasa a XI-a

1. Fie matricea  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  cu proprietăţile:  $\det(A) = 0$  şi  $\det(A+I_2) = 1$ . Demonstraţi:

(a)  $A^2 = O_2$ .

(b)  $\det(A + kI_2)$  este pătrat perfect, pentru oricare  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ovidiu Pop

**Soluţie.**

(a) Fie  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Conform ipotezei,  $ad - bc = 0$  şi  $(a+1)(d+1) - bc = 1$ .

Rezultă  $\text{tr}(A) = a + d = 0$  ..... **2 puncte**

Cum  $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = 0$ , avem  $A^2 = O_2$  ..... **2 puncte**

(b)  $\det(A + kI_2) = \det(A) + k \cdot \text{tr}(A) + k^2 = k^2$  - pătrat perfect..... **3 puncte**

2. Fie  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  şi  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  astfel încât  $X^{2023} = A$ .

(a) Demonstraţi că  $AX = XA$ .

(b) Determinaţi matricea  $X$ .

Gazeta Matematică, enunţ modificat

**Soluţie.**

(a)  $AX = X^{2024} = XA$  ..... **2 puncte**

(b) Din relaţia  $AX = XA$ , rezultă  $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ..... **1 punct**

Din  $X^{2023} = A \Rightarrow \det(X^{2023}) = \det(A) \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$  ... **1 punct**

Deci,  $(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 2$  ..... **1 punct**

Cum  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , şi  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ , sunt posibile cazurile:

i.  $\begin{cases} a+b+c=2 \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 1 \end{cases}$  . Sistem fără soluţii în  $\mathbb{Z}$  ...**1 punct**

ii. 
$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2 \end{cases},$$
 cu soluțiile întregi  $(a, b, c) \in \{(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)\}$ .

În consecință,  $X \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ .

Ecuția  $X^{2023} = A$  este verificată doar de  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$  ... **1 punct**

3. (a) Demonstrați că  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}$ .

(b) Fie șirul de numere reale  $(x_n)_{n \geq 1}$ , definit prin

$$x_n = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x)(1 - \sin^3 x) \cdot \dots \cdot (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}, \quad n \geq 1.$$

Demonstrați că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este divergent.

\*\*\*

**Soluție.**

(a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}$ . .... **3 puncte**

(b)  $x_n = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \sin^k x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x) \sum_{i=0}^{k-1} \sin^i x}{\cos^2 x} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{2} = \frac{n!}{2^n}$  .... **3 puncte**  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \infty$  implică  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , deci  $(x_n)_{n \geq 1}$  este divergent .... **1 punct**

4. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale strict pozitive, cu proprietatea  $a_{n+1} = 2^{-a_n}$ , pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ . Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^{-x}$ . Presupunem cunoscut faptul că ecuația  $(f \circ f)(x) = x$  admite o soluție unică  $x_0 \in (0, 1)$ . Demonstrați că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

Romeo Ilie

**Soluție.**

Prin inducție, se demonstrează  $a_n \in (0, 1)$ ,  $\forall n \geq 2$  ..... **1 punct**  
 Avem  $a_{n+1} = f(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Rezultă  $a_{n+2} = (f \circ f)(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  ..... **1 punct**  
 Funcția  $f$  este strict descrescătoare. Rezultă că funcția  $f \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este strict crescătoare ..... **1 punct**

Deducem că subșirurile  $(a_{2n})_{n \geq 1}$  și  $(a_{2n-1})_{n \geq 1}$  sunt monotone, cu tipul de monotonie indicat de ordinea primilor doi termeni ai fiecărui subșir (demonstrație prin inducție) și mărginite, deci convergente ..... **2 puncte**

Fie  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} \in [0, 1]$ . Trecând la limită în relația  $a_{2n+2} = (f \circ f)(a_{2n}) = 2^{-2^{-a_{2n}}}$  obținem  $\ell = 2^{-2^{-\ell}} = (f \circ f)(\ell)$ . Conform enunțului,  $\ell = x_0$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = x_0$ . Analog demonstrăm  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = x_0$ . Rezultă că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este convergent, cu limita  $x_0$  ..... **2 puncte**