

**Clasa a IX a (Barem de corectare și notare)**

1. Pentru orice numere naturale nenule  $m$  și  $n$  se notează  $E(m, n) = \sqrt{m^2 + 3n}$ .

(a) Determinați numerele naturale  $m$  pentru care  $(m+1) \cdot E(m, m) = 3m+1$ .

(b) Calculați partea întreagă a numărului  $E(n, n)$ .

(c) Arătați că dacă  $m, n, p \in \mathbb{N}^*$  și  $m^2 + n^2 < 2p^2$ , atunci  $E(m, m) \cdot E(n, n) < E^2(p, p)$ .

|                                                                                                                                                                                                                                                |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| (a) $E(m, m) = \frac{3m+1}{m+1} < 3 \Rightarrow m \in \{0, 1\}$ ; singura soluție a problemei: $m = 1$                                                                                                                                         | (3p) |
| (b) Deoarece $n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 3n < n^2 + 4n + 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , deducem $n+1 \leq E(n, n) < n+2$ , deci $[E(n, n)] = n+1$                                                                                               | (2p) |
| c) Inegalitatea mediilor conduce la $E(m, m)E(n, n) \leq \frac{m^2 + n^2 + 3(m+n)}{2}$ .<br>Folosind $(m+n)^2 \leq 2(m^2 + n^2)$ rezultă<br>$E(m, m)E(n, n) \leq \frac{m^2 + n^2 + 3\sqrt{2(m^2 + n^2)}}{2} < \frac{2p^2 + 6p}{2} = E^2(p, p)$ | (2p) |

2. Se consideră un triunghi  $ABC$  și punctele  $M, N, P$  pe laturile  $[BC], [AC]$ , respectiv  $[AB]$ ,

pentru care  $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$ . Demonstrați că, dacă  $2 \cdot \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PN}$  și  $2 \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC}$ , atunci

$$\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{EF}.$$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$                                                                                                                                                                                                                               | (2p) |
| $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CF} = \dots = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$                                                                                                                                                                                                                       | (5p) |
| <b>Soluție alternativă :</b> Fie $T$ un punct pe $(BC)$ astfel ca $CT = \frac{1}{3}CB$ . Deducem că $TNAP$ este paralelogram, deci $AT$ trece prin mijlocul lui $(PN)$ , adică $A, E, T$ sunt coliniare și $E$ este mijlocul lui $(AT)$ ; cum $F$ este mijlocul lui $(MT)$ , avem că $EF$ este linie mijlocie în $ATM$ , de unde concluzia e imediată. |      |

3. Se consideră o mulțime  $M$  de numere reale care are următoarele două proprietăți:

(1)  $1 \in M$ .

(2) dacă  $x \in M$  și  $(x+2y) \in M$ , atunci  $y \in M$ .

Arătați că:

(a)  $\frac{1}{4} \in M$ ; (b)  $\frac{1}{2^n} \in M$  pentru orice număr natural  $n$ .

|                                                                                                                                                                                              |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $1 + 2 \cdot 0 \in M \Rightarrow 0 \in M$ ; $0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \in M \Rightarrow \frac{1}{2} \in M$ și $0 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \in M \Rightarrow \frac{1}{4} \in M$ | (3p) |
| Acum, $\frac{1}{2^0} \in M$ , iar dacă $\frac{1}{2^n} \in M$ , deducem                                                                                                                       | (4p) |

|                                                                                                                                                          |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $0 + 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \in M \Rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \in M$ . Demonstrația este astfel încheiată prin inducție matematică. |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

4. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x - 3$  și mulțimea  $M_f = \{g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f \circ g = g \circ f\}$ .

(a) Arătați că  $M_f \neq \emptyset$ .

(b) Demonstrați că dacă  $g \in M_f$ , atunci  $g(1)$  este un număr întreg.

|                                                                                                                   |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| (a) de exemplu $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x+3}{4}$ sau $g(x) = 1$                        | (3p) |
| (b) $f(a) = a \Rightarrow a = 1$ ,<br>așadar singurul număr real $a$ pentru care avem $f(a) = a$ este $a = 1$ (*) | (1p) |
| $f(g(1)) = g(f(1)) \Rightarrow f(g(1)) = g(1)$ ; în baza observației (*) se ajunge la $g(1) = 1 \in \mathbb{Z}$   | (3p) |