

Olimpiada Națională de Matematică
Faza Locală Dâmbovița, 16 februarie 2020
Clasa a V-a

Subiectul 1. Determinați numerele prime p și q care verifică egalitatea

$$p^2 + p = q^3 + 2q.$$

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Determinați $x, y, z \in \mathbb{N}$ astfel încât $64^x + 16^y + 4^z = 321$.

Subiectul 3. Fie numărul $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 25 + 169$.

- a) Ce rest dă N la împărțirea cu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 196$?
- b) Aflați ultima cifră a lui N .
- c) Demonstrați că N nu este pătrat perfect.

Subiectul 4. Fie $n \geq 3$ un număr natural. Demonstrați că dacă unul din numerele $2^n - 1$ sau $2^n + 1$ este prim, atunci celălalt este număr compus.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore

Olimpiada Națională de Matematică
Faza Locală Dâmbovița, 16 februarie 2020
Clasa a VI-a

Subiectul 1. Fie mulțimea $A = \{1, 5, 9, 13, 17, \dots, 101, 105\}$. Arătați că în orice submulțime a lui A cu 15 elemente, există două elemente care au suma divizibilă cu 22.

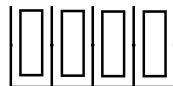
Gazeta Matematică

Subiectul 2. Aflați $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $a + b + c$ să fie cu 3 mai mare decât un pătrat perfect și în plus,

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{9}{c}.$$

Subiectul 3. Desenați un cerc și un triunghi astfel încât intersecția laturilor triunghiului cu cercul să fie formată din 1, 2, 3, 4, ... puncte. Care este numărul maxim de puncte pe care le poate avea intersecția? Justificare.

Subiectul 4. Patru autoturisme (unul alb, unul negru și două roșii) sunt parcate la întâmplare într-o parcare cu patru locuri.



Care este probabilitatea ca autoturismele roșii să fie parcate unul lângă altul?

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

Olimpiada Națională de Matematică
Faza Locală Dâmbovița, 16 februarie 2020
Clasa a VII-a

Subiectul 1. Se consideră numerele

$$a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n}$$
$$b = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)},$$

unde n este număr natural nenul. Demonstrați că $4ab < 1$.

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater convex, Q, R, S, P mijloacele laturilor A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 , respectiv A_4A_1 și notăm $\{G\} = PR \cap QS$. O dreaptă d , care trece prin G , lasă de o parte a sa punctele A_1, A_2 și de cealaltă parte punctele A_3, A_4 . Fie $B_1, B_2, B_3, B_4 \in d$ astfel încât

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4.$$

Demonstrați că $A_1B_1 + A_2B_2 = A_3B_3 + A_4B_4$.

Subiectul 3. Aflați cifrele a, b, c pentru care avem: $\sqrt{abc} = \sqrt{ab} + c$.

Subiectul 4. a) Demonstrați că un pătrat se poate descompune în 2025 de pătrate, nu neapărat egale.

b) Se poate descompune un pătrat în 2020 de pătrate, nu neapărat egale?

Cristinel Mortici

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică
Faza Locală Dâmbovița, 16 februarie 2020
Clasa a VIII-a

Subiectul 1. Fie numerele

$$a = \frac{2}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{2}{99^2} + \frac{2}{100^2}$$
$$b = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)^2 + \left(1 - \frac{99}{100}\right)^2.$$

Demonstrați că $\sqrt{\frac{a-b}{2}}$ este număr rațional.

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Două numere reale x, y satisfac relația:

$$|x - 3 - |y - 2|| + |y - 2 - |x - 3|| = 0.$$

Decideți dacă, în acest caz, numărul $z = \sqrt{y^2 - 4x + 8} - \sqrt{x^2 - 6y + 3}$ este pozitiv, negativ sau nul.

Subiectul 3. Demonstrați că, pentru orice numere întregi m, n , avem:

$$\left[\frac{m+n}{2}\right] + \left[\frac{m-n+1}{2}\right] = m.$$

- Subiectul 4.** a) Arătați că un cub se poate împărți în 125 de cuburi.
b) E posibil ca un cub să poată fi împărțit în 111 cuburi, nu neapărat egale?

Cristinel Mortici

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.