

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16 februarie 2020
Clasa a VI-a

BAREM DE REZOLVARE ȘI NOTARE

1. a) Aflați numerele naturale x și y , știind că $(x^2 + x) \cdot (157y + 68) = 2020$.

1a)	$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ Se observă că x trebuie să fie diferit de zero. Cum x și x^2 au aceeași paritate, deducem că $x^2 + x$ este număr par nenul.	1p
	distingem cazurile: Cazul 1) $2020 = 2 \cdot 1010$ $x^2 + x = 2$ și $157y + 68 = 1010$; Obținem soluția $x=1$ și $y=6$.	1p
	Cazul 2) $2020 = 4 \cdot 505$ $x^2 + x = 4$ și $157y + 68 = 505$; pentru $x=1$, obținem $x^2 + x = 2$, nu convine pentru $x=2$, obținem $x^2 + x = 6$, nu convine pentru $x \geq 2$, obținem $x^2 + x \geq 6$, nu convine În acest caz nu se obțin soluții.	1p
	Cazul 3) $2020 = 1010 \cdot 2$ $x^2 + x = 1010$ și $157y + 68 = 2$ Cum $157y + 68 \geq 68$, deducem că în acest caz nu se obțin soluții.	1p

b) Aflați numerele naturale nenule a și b , știind că cel mai mare divizor comun al lor este 10 și

$$3a + 5b = 180.$$

1b)	Cum 10 este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b , deducem că există numerele naturale prime între ele x și y , încât $a=10x$ și $b=10y$; ecuația $3a + 5b = 180$, devine $30x + 50y = 180$ sau $3x + 5y = 18$	1p
	pentru $y \geq 4$, se obține $5y \geq 20$, nu convine, deci $y \in \{1, 2, 3\}$ pentru $y=1$, obținem $3x = 13$, nu convine;	1p

	pentru $y=2$, obținem $3x=8$, nu convine.	
	pentru $y=3$, obținem $3x=3$, adică $x=1$ Soluție: $a=10$ și $b=30$	1p

2. Aflați numerele naturale a , b , c și d , știind că numerele $a+1$, $b+2$, $c+3$ și 5 sunt direct proporționale cu numerele 4 , 6 , 8 și respectiv $d+9$.

2.	$\frac{a+1}{4} = \frac{b+2}{6} = \frac{c+3}{8} = \frac{5}{d+9}$	2p
	$(d+9)(a+1)=20$, deducem că $(d+9)$ este un divizor al lui 20 ; $(d+9)(b+2)=30$, de unde $(d+9)$ este un divizor al lui 30 ; $(d+9)(c+3)=40$, de unde $(d+9)$ este un divizor al lui 40 ;	2p
	$(20, 30, 40) = 10$	1p
	$d+9$ este un divizor al lui 10 , adică $d+9 \leq 10$; cum $d+9 \geq 9$, obținem că $d+9 = 10$, deci $d=1$	1p
	se obține soluția $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=1$	1p

3. Pe segmentul (AB) cu lungimea de 360cm , se consideră punctele $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{20}$, în această ordine, astfel încât lungimile segmentelor $[AP_1], [P_1P_2], [P_2P_3], \dots, [P_{19}P_{20}]$, în această ordine, să fie numere naturale consecutive. Se notează cu x lungimea segmentului $[P_{20}B]$, unde x este un număr natural.

a) Aflați valoarea minimă și valoarea maximă a lui x ;

3a)	Deducem că $A \neq P_1 \neq P_2 \neq \dots \neq P_{20} \neq B$. Segmentele formate conform condițiilor din enunț sunt în număr de 21 , dintre care primele 20 au ca lungimi numere naturale consecutive nenule, iar ultimul are lungimea x . Lungimea segmentului $[AB]$ va fi: $a+(a+1) + (a+2) + (a+3) + \dots + (a+19) + x = 360\text{cm}$ $20a + (1+2+3+4+\dots+19) + x = 360\text{cm}$ $20a + 190 + x = 360\text{cm}$ $20a + x = 170\text{cm}$, unde am notat cu $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ lungimea segmentului $[AP_1]$, segmentul care are lungimea cea mai mică dintre segmentele care au lungimile numere naturale nenule consecutive;	2p
-----	---	-----------

	pentru a obține valoarea maximă a lui x vom alege cele mai mici 20 de numere naturale consecutive nenule, adică $a = 1\text{cm}$ Din ecuația : $20a + x = 170\text{cm}$, obținem valoarea maximă a lui $x=150\text{cm}$.	1p
	Din ecuația : $20a + x = 170\text{cm}$, deducem că $20a \leq 170$; pentru $a = 9$, obținem $20a = 180$, nu convine. Pentru $a \geq 9$, $20a \geq 180$, nu convine; pentru $a = 8$, obținem $20a = 160 < 170$, de unde $x = 170 - 160 = 10\text{cm}$, deci, valoarea minimă a lui x este de 10cm .	1p

b) Știind că M este mijlocul segmentului $[AB]$, iar lungimea segmentului $[AP_1]$ este de 6 cm , aflați cărui segment de forma $[P_i P_j]$ îi aparține punctul M , unde i și j sunt numere naturale consecutive și $1 \leq i < j \leq 20$.

3b)	Cum M este mijlocul segmentului $[AB]$ de lungime 360cm , obținem lungimea segmentului $[AM]$ egală cu $360:2 = 180\text{cm}$	1p
	Cum lungimea segmentului $[AP_1]$ este de 6 cm , obținem că lungimea segmentului $[AM]$ este o sumă de forma : $6+7+8+9+\dots+y \leq 180\text{cm}$	1p
	$6+7+8+9+\dots+18+19=175$, iar $6+7+8+9+\dots+18+19+20=195$, adică $175 = 6+7+8+9+\dots+18+19 < 180 < 6+7+8+9+\dots+18+19+20 = 195$, deci, punctul M se află pe segmentul de lungime 20 , al 15 -lea segment, adică M aparține segmentului $[P_{14} P_{15}]$.	1p

4. Se consideră unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$, astfel încât $m(\angle AOB) = \overline{ab}$ grade, $m(\angle BOC) = \overline{bc}$ grade și $m(\angle MON) = \overline{ac}$ grade, unde $[OM]$ este bisectoarea unghiului $\angle AOB$, $[ON]$ este bisectoarea unghiului $\angle BOC$, iar a, b și c sunt cifre distincte în baza 10 . Aflați valorile necunoscutele a, b și c .

4.	Se observă că cifrele a, b și c trebuie să fie nenule. Distingem 3 cazuri. Cazul 1) Unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente. Cum unde $[OM]$ este bisectoarea unghiului $\angle AOB$, $[ON]$ este bisectoarea unghiului $\angle BOC$, obținem $m(\angle MON) = [m(\angle AOB) + m(\angle BOC)]:2$ sau $\overline{ab} + \overline{bc} = 2\overline{ac}$;	1p
	Deducem $11b = 10a + c$ sau $11b = \overline{ac}$ Cum b este cifră nenulă în baza 10 , obținem $11b \in \{11, 22, 33, \dots, 99\}$ adică, $\overline{ac} \in \{11, 22, 33, \dots, 99\}$, mulțime care conține doar numere cu cifrele egale; cum cifrele a, b și c sunt distincte, problema nu are soluție în acest caz.	1p
	Cazul 2) Unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$ nu sunt adiacente, iar $[OC]$ se află în interiorul $\angle AOB$; Obținem $m(\angle MON) = [m(\angle AOB) - m(\angle BOC)]:2$	1p

	sau $\overline{ab} - \overline{bc} = 2 \overline{ac}$; sau $\overline{ab} = \overline{bc} + 2 \overline{ac}$; $10a + b = 20a + 10b + 3c$ $0 = 10a + 9b + 3c$, ecuație care nu are soluții în N.	
	Cazul 3) Unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$ nu sunt adiacente, iar [OA se află în interiorul $\angle BOC$ Obținem $m(\angle MON) = [m(\angle BOC) - m(\angle AOB)] : 2$ sau $\overline{bc} - \overline{ab} = 2 \overline{ac}$; sau $\overline{bc} = 2 \overline{ac} + \overline{ab}$ Ecuația devine : $9b = 30a + c$ Deducem că c este multiplu de 3, $c \neq 0$, $c \in \{3, 6, 9\}$	1p
	i) Pentru $c = 3$, avem $3b = 10a + 1$. Pentru $a = 1$, avem $3b = 11$, nu convine. Pentru $a = 2$, avem $3b = 21$, $b = 7$. Pentru $a \geq 3$, $10a + 1 \geq 31$, adică $b > 10$, nu convine. Deci, obținem soluția : $a = 2$, $b = 7$, $c = 3$	1p
	ii) Pentru $c = 6$, avem $3b = 10a + 2$; Pentru $a = 1$, avem $3b = 12$, adică $b = 4$. Obținem soluția $a = 1$, $b = 4$, $c = 6$.	1p
	pentru $a = 2$, avem $3b = 22$, nu convine Pentru $a \geq 3$, avem $10a + 2 \geq 32$, adică $b > 10$, nu convine.	1p