



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A X-A
Matematică-informatică

SUBIECTUL I(7puncte)

Fie $a = (\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}-1})^{-1}$ și $b = \sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$

(2p) a) Să se aducă numărul a la o formă mai simplă.

(2p) b) Să se arate că $b = \sqrt{5} - 2$

(3p)c) Arătați că $a > b$.

SUBIECTUL II (7puncte)

(3p) a) Să se demonstreze egalitatea:

$$\frac{1}{\log_2 1 + \dots + \log_2 2020} + \frac{1}{\log_3 1 + \dots + \log_3 2020} + \dots + \frac{1}{\log_{2020} 1 + \dots + \log_{2020} 2020} = 1.$$

(4p) b) Să se calculeze $[\log_2 2020] + [\log_2 2024] + [\log_2 2028] + \dots + [\log_2 2048]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

SUBIECTUL III (7puncte)

Fie numărul complex $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

(2p) a) Arătați că numărul $\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$ este subunitar.

(2p) b) Calculați $u(|z|^{2020})$, unde $u(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului a .

(3p) c) Deduceți că $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \in \mathbb{R}$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z .

SUBIECTUL IV (7puncte)

(3p) a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{\sqrt{x} + 3} + \sqrt[3]{13 - \sqrt{x}} = 4$.

(4p) a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x - 8} = 2$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.