

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică

Clasa a IX-a

Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1. Să se determine numerele reale pozitive x pentru care elementele mulțimii $\{x, \{x\}, [x]\}$ formează o progresie geometrică.

Problema 2. Șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ verifică $x_1 = 2$ și $x_{n-1} = 1 + \sqrt{x_n - x_{n-1}}$, $n \geq 2$. Să se arate că:

a) $x_n = 1 + x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}$, oricare ar fi $n \geq 2$.

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} < 1$, oricare ar fi $n \geq 2$.

G.M.-B nr. 11/2009

Problema 3. Fie $ABCD$ un paralelogram și fie Q, M puncte în planul său astfel încât $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{QD}$ și $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DB}$.

a) Arătați că $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AD}$ și $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

b) Dacă P este punctul de intersecție al dreptelor AB și QM , demonstrați că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$.

G.M.-B nr. 11/2012

Problema 4. Fie a, b, c respectiv lungimile laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC . Să se arate că punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC dacă și numai dacă

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Notă:

- Timp de lucru: 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 9 Februarie 2013
Clasa a IX-a
 Soluții și Barem de notare

Problema 1. Se observă că pentru $x = 0$ condiția este verificată.....	1 p
Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $[x] = 0$, $\{x\} = x$ și elementele $0, x, x$, cu $x \neq 0$, nu pot forma o progresie geometrică.....	1 p
Fie $x \geq 1$. Atunci $\{x\} < [x] \leq x$, iar elementele mulțimii $\{x, \{x\}, [x]\}$ formează o progresie geometrică dacă și numai dacă avem $x\{x\} = [x]^2$	2 p
Relația $x\{x\} = [x]^2$ implică $x^2 - x[x] - [x]^2 = 0$. Deducem $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}[x]$	2 p
Însă cum $x < [x] + 1$, se obține $\frac{\sqrt{5}-1}{2}[x] < 1$, adică $[x] < \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$	1 p
Rezultă $[x] = 1$, deci $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1 p
Concluzie. $x \in \left\{0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$	1 p
Oficiu	1 p
Total	10 p

Problema 2. a) Avem $(x_{n-1} - 1)^2 = x_n - x_{n-1}$, de unde rezultă $x_n = 1 - x_{n-1} + x_{n-1}^2$, oricare ar fi $n \geq 2$	1 p
Se demonstrează că propoziția $P(n) : x_n = 1 + x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}$ este adevărată oricare ar fi $n \geq 2$ prin inducție matematică după n	1 p
Pentru $n = 2$, avem $x_2 = 1 - 2 + 4 = 3$, deci $x_2 = 1 + x_1$, prin urmare $P(2)$ este adevărată. ...	1 p
Presupunem că $P(n)$ este adevărată pentru un $n \geq 2$, deci $x_n = 1 + x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}$. Deducem $x_{n+1} = 1 - x_n + x_n^2 = 1 + (x_n - 1)x_n = 1 + (x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1})x_n$, adică propoziția $P(n+1)$ este adevărată.	2 p
b) Se observă că termenii șirului sunt nenuli. Atunci, prin împărțire cu $x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}x_n$ propoziția de la a) este echivalentă cu propoziția " $\frac{1}{x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} = \frac{1}{x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}x_n} + \frac{1}{x_n}$ este adevărată oricare ar fi $n \geq 2$ ".	1 p
Deducem succesiv $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}x_n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} = \dots = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} = 1$, oricare ar fi $n \geq 2$	2 p
Cum $\frac{1}{x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}x_n} > 0$, se obține inegalitatea din enunț	1 p
Oficiu	1 p
Total	10 p

Problema 3. a) Din $\overline{QA} + \overline{QB} = \overline{QD}$ deducem că $\overline{QD}$ este diagonală în paralelogramul $ADBQ$, de unde rezultă că $\overline{QB} = \overline{AD}$	2 p
Din $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{DB}$, folosind regula triunghiului de adunare a vectorilor liberi, deducem $\overline{MA} + (\overline{MA} + \overline{AB}) = \overline{DA} + \overline{AB}$, de unde $2\overline{MA} = \overline{DA}$, sau $2\overline{AM} = \overline{AD}$. Cum $\overline{AD} = \overline{BC}$, rezultă egalitatea $2\overline{AM} = \overline{BC}$. În particular, deducem că punctul M este mijlocul segmentului $[AD]$	2 p
b) Stabilirea configurației geometrice, eventual figura	1 p
Punctul P este intersecția a două mediane ale triunghiului ADQ , deci este centrul de greutate al triunghiului ADQ	2 p
Concluzia: P centrul de greutate al triunghiului ADQ implică $\overline{PA} + \overline{PD} + \overline{PQ} = \vec{0}$	2 p
Oficiu	1 p
Total	10 p

Problema 4. Fie AA', BB' , cu $A' \in [BC]$, $B' \in [AC]$, două dintre bisectoarele interne ale triunghiului ABC . Aplicând teorema bisectoarei se obține $\overline{BA'} = \frac{c}{b+c}\overline{BC}$, $\overline{AB'} = \frac{c}{a+c}\overline{AC}$	2 p
Se obține apoi $\overline{AA'} = \frac{b}{b+c}\overline{AB} + \frac{c}{b+c}\overline{AC}$, $\overline{BB'} = -\overline{AB} + \frac{c}{a+c}\overline{AC}$	1 p
Cum $I \in (AA')$, există un număr real $x \in (0, 1)$ astfel încât $\overline{AI} = x\overline{AA'}$	1 p

Deducem $\overline{BI} = \left(\frac{xb}{b+c} - 1\right) \overline{AB} + \frac{xc}{b+c} \overline{AC}$	1 p
Vectorii $\overline{BI}$ și $\overline{BB'}$ fiind coliniari, rezultă $\frac{\frac{xb}{b+c}-1}{-1} = \frac{\frac{xc}{b+c}}{\frac{c}{a+c}}$, de unde se obține $x = \frac{b+c}{a+b+c}$	1 p
Prin urmare avem $\overline{AI} = \frac{b}{a+b+c} \overline{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overline{AC}$	1 p
Deducem apoi $a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = (a+b+c)\overline{IA} + b\overline{AB} + c\overline{AC} = (-b\overline{AB} - c\overline{AC}) + b\overline{AB} + c\overline{AC} = \vec{0}$.	
Prin urmare centrul cercului înscris în triunghiul ABC verifică relația din enunț	1 p
Reciproc, fie I' un punct care verifică relația dată. Deducem că $(a+b+c)\overline{II'} = \vec{0}$, și cum $a+b+c \neq 0$, rezultă că $\overline{II'} = \vec{0}$, adică punctele I și I' coincid.	1 p
Oficiu	1 p
Total	10 p
Observație. Soluția trebuie să includă o demonstrație a expresiei vectorului de poziție al centrului cercului înscris în triunghi.	

Notă: Orice rezolvare corectă, completă sau parțială, va fi notată cu punctajul corespunzător.