

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024
CLASA a XII - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y + xy$ și se notează $x_n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ de } x}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine:

- a) numerele reale x care sunt egale cu simetricile lor în raport cu legea „*”;
- b) numerele reale y pentru care $y_6 = 63$;
- c) numerele reale k pentru care mulțimea $M = [k, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „*”.

2. Să se calculeze

$$\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx.$$

3. Se consideră grupul $(G, \cdot)$ cu elementul neutru e .

- a) Demonstrați că $(aba^{-1})^n = ab^n a^{-1}, \forall a, b \in G$ și $n \in \mathbb{N}^*$;
- b) Demonstrați că dacă există $a, b \in G$ astfel încât $ababa = babab$, atunci $a^{2024} = e$, dacă și numai dacă $b^{2024} = e$.

- 4.

- a) Să se arate că funcțiile $F, G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \arctg x$ și $G(x) = -\arctg \frac{1}{x}$ sunt primitive ale aceleași funcții;
- b) Să se calculeze

$$\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{(x \ln x)^{2023}}{(x^2 + x + 1)^{2024}} \cdot \cos(2024 \arctg x) dx, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*.$$