

Barem de corectare OLM 2020 Clasa a XII-a

P1-autor Florin Rotaru (GM 9/2019)

$0 \leq I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$	2p
Limita cerută este de forma 1^∞ ; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 2 \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((1 + 2I_n)^{\frac{1}{2I_n}} \right)^{2nI_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} 2nI_n}$	2p
Integrând prin părți avem $nI_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx = n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x+1} \Big _0^1 + \frac{n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2} dx$. Al doilea termen din sumă are limita 0 (asemănător cu limita lui I_n de mai sus), rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2}$.	2p
$\lim_{n \rightarrow \infty} 2nI_n = 1$ și atunci rezultatul final este e .	1p

P2- autor Petru Vlad

În $I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{a^x + 1} dx$, f funcție pară, schimbând variabilă $-x = t$, se obține $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{a^x f(x)}{a^x + 1} dx$	2p
$2I = \int_{-1}^1 \frac{(1 + a^x)f(x)}{a^x + 1} dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$, deci $I = \int_0^1 f(x) dx$	2p
În particular, $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x^2} + 1 - x^2}{a^x + 1} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx + \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3}$	3p

P3

a) Verificarea celor 3 axiome	3p
b) Grupul fiind comutativ, ecuația se scrie: $(x \circ i) \circ x = (x \circ i) \circ i$	2p
Simplificând cu $x \circ i$ și rezultă că $x = i$, singura soluție a ecuației.	2p
Obs. Ecuația se poate rezolva calculând cei doi membri ai ecuației; se obține ecuația echivalentă $(1-i)x^2 - 2x + 1 + i = 0$, cu soluțiile $x_2 = 1$ care nu se găsește în G și $x_1 = i$.	

P4- autor Marius Gîrjoabă

a) Se observă că $x \notin H$, pentru că H e un subgrup propriu. De asemenea, $xH = Hx$, pentru că $Hx \cap H = \emptyset$ și mulțimile xH și Hx sunt echipotente.	2p
Fie $y = z^2 \in K$; dacă $z \in H$, atunci $y = z^2 \in H$.	1p
În caz contrar, $z \in xH$, deci $z = xh_1$, $h_1 \in H$. Atunci $y = z^2 = x(h_1x)h_1 = x(xh_2)h_1 = x^2h \in x^2H$. Dar $x^2H \subseteq H$; într-adevăr, dacă $x^2h \in xH$, atunci $x^2h = xk$, $k \in H \Rightarrow xh = k \Rightarrow x = kh^{-1} \in H$, contradicție. În concluzie, $K \subseteq H$	1p
b) Cum H și xH sunt disjuncte și echipotente, rezultă că ordinul lui H este n . De fapt, H este un subgrup de indice 2 și se aplică teorema lui Lagrange.	1p
Cum n este impar, rezultă ca ordinul oricărui element din H este impar. Atunci $x^{2k+1} = 1 \Rightarrow x^{2k+2} = x \Rightarrow x = (x^{k+1})^2 \in K$, deci $H \subseteq K$.	2p
Obs. Un exemplu de astfel de grup este grupul diedral D_n , cu n impar. Aici subgrupul H este grupul rotațiilor.	